Предисловие

В процессе обучения математике в 5 классе происходит знакомство школьников с различными ее разделами: натуральными и дробными числами; простейшими понятиями алгебры, комбинаторики и статистики; начальными сведениями из планиметрии и стереометрии. Заметим, что изучаемый материал очень разнородный и разноплановый и излагать его тяжело. Кроме того, на наш взгляд, рассмотрение некоторых вопросов преждевременно. Трудно ожидать, что пятиклассники смогут изобразить эскиз многогранника (даже многие одиннадцатиклассники этого не умеют делать). Поэтому при обучении значительное внимание уделяется развитию интереса школьников к математике в целом. Для этого приводятся исторические сведения, любопытные факты и т. д.

Настоящее пособие адресовано прежде всего преподавателям, работающим по учебнику Г.В. Дорофеева и др. (М.: Просвещение), и рассчитано на 170 уроков (34 учебные недели). Нумерация задач в поурочном планировании соответствует данному учебнику. По ряду тем в издании приведены и творческие задания. Кроме того, для данного учебника разработан и может быть использован (хотя это, разумеется, необязательно) учебно-методический комплект, включающий в себя: сборник учебных программ, рабочую тетрадь, дидактические материалы, тематические тесты, контрольные работы, устные упражнения, методические рекомендации.

В предлагаемых «Поурочных разработках» подробно рассмотрено содержание каждого урока. Предусмотрены различные формы контроля успеваемости: письменные опросы, самостоятельные и контрольные работы, контрольные вопросы и т. д.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку, повысить ее качество и при этом сэкономить время учителя.

В качестве дополнительного материала к урокам учитель может использовать издания:

- Контрольно-измерительные материалы. Математика. 5 класс / Сост. Л.П. Попова. М.: ВАКО, 2016.
- Тематические тесты. Математика. 5 класс / Сост. В.И. Ахременкова. М.: ВАКО, 2016.
- Самостоятельные и контрольные работы по математике. 5 класс / Сост. М.Я. Гаиашвили. М.: ВАКО, 2016.
- Сборник практических задач по математике. 5 класс / Сост. Л.П. Попова. М.: ВАКО, 2016.

Рекомендации к проведению уроков

Разумеется, все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению математики. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. На наш взгляд, будет лучше, если каждый отдельный ученик усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не освоит ничего. В последнем случае ситуация принимает опасный характер: у учащихся возникает комплекс неполноценности, к выполнению домашнего задания привлекаются все домочадцы, ученики начинают списывать, подсказывать друг другу, использовать шпаргалки и т. д. При этом начисто пропадает интерес к математике и желание ее изучать.

Содержание уроков в данном пособии является избыточным (в расчете на очень подготовленный, сильный класс). При необходимости часть материала следует опустить или изложить достаточно поверхностно. С учетом несобранности и неорганизованности пятиклассников желательно иметь в расписании сдвоенные уроки математики, особенно при написании и разборе контрольных работ.

Поурочное планирование включает в себя четыре основных вида занятий:

1) урок изучения нового материала;
2) урок отработки и закрепления пройденного материала;
3) урок повторения материала;
4) контрольная работа.

Рассмотрим эти виды занятий.

1. **Урок изучения нового материала** включает в себя следующие этапы.

I. Сообщение темы и цели урока (≈ 1–2 мин). Следует объяснить учащимся необходимость изучения данной темы (область применения этих знаний) и сообщить цель занятия (навыки и приемы, которыми школьники должны овладеть в ходе проведения урока).

II. Работа по теме урока (≈ 15 мин). Здесь возможны два подхода:

1) с помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела математики. Затем педагог уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая, что многие понятия ученикам незнакомы, такой подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем или отдельных фрагментов урока;
2) учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но является недостаточно эффективным (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. Задания на уроке учитель дает из числа наиболее характерных типовых задач (≈ 15 мин). Они могут выполняться:

1) самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором одним из учеников (например, первым выполнившим) у доски; при этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, предложение других способов решения и т. д.;
2) в ходе диалога учащихся, сидящих за одной партой (выполнение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка);
3) у доски одним или несколькими учащимися.

После выполнения заданий возможен как взаимоконтроль учеников у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется, при этом будет происходить диалог учителя с учеником, отвечающим у доски.

IV. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания новых понятий, терминов, навыков и т. д. (≈ 5 мин). Вопросы можно адресовать как одному ученику, так и всему классу. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется попросить учащегося, кроме определения, привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие ученики или учитель.

V. Творческие задания (предусмотрены в ряде уроков). От приведенных в учебнике они отличаются или большей сложностью, или нестандартностью формулировки, или новым способом решения. Поэтому очень полезно разобрать подобные задания. В зависимости от подготовленности класса они могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);
2) со всеми учащимися как в качестве задания на уроке, так и в качестве домашнего задания;
3) дифференцированно с наиболее подготовленными учениками;
4) во время проведения математических боев, олимпиад, недель математики и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах отведенного на урок времени.

VI. Подведение итогов урока ($\approx$ 1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы учеников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

Задание на дом дается учителем из числа типовых, характерных задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 30–40 мин. Желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задач. Это способствует активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

Необходимо приучить учащихся при выполнении домашнего задания фиксировать непонятый материал: понятия, теоретические сведения, нерешенные задачи и т. п. Полезно научить учеников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на него. Особенно такие навыки понадобятся учащимся в старших классах. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии по математике.

2. **Урок на отработку и закрепление пройденного материала** отличается этапом II, который предусматривает повторение и контроль материала ($\approx$ 20 мин). Прежде всего, данный этап включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы их задавали сами учащиеся. Вопросы могут содержать непонятые определения, термины и другой теоретический материал.

Скорее всего, понадобится и разбор нерешенных задач. В этой части желательна максимальная активность всего класса. Ученик, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более удобными для понимания ровесниками и доходчивыми, чем объяснения учителя. Ориентировочное время, отведенное на эту стадию этапа II, составляет ≈ 5–10 мин.

На второй стадии данного этапа предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ≈ 10–15 мин.

Задания для письменного опроса содержат теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданиям, выполненным в классе, и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на понимание учеником тех или иных понятий, а не на строгость и четкость формулировок (к ним учащиеся придут в старших классах).

Самостоятельная работа содержит 2–3 типовые, характерные задачи.

В материалах уроков тесты не содержатся. Это связано с тем, что пятиклассники очень часто ошибаются. Тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, невнимательность, пробелы в усвоении предыдущего материала, арифметические ошибки и т. д.

3. **Уроки повторения материала** проводятся в конце обучения. Они носят исключительно практическую направленность. Необходимо вкратце (≈ 5–10 мин) напомнить основные, базовые сведения по теме. Оставшееся время урока затрачивается на повторение и отработку практических навыков решения задач.

4. По изучаемым темам проводятся **контрольные работы**. Они представлены в четырех вариантах (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – несколько сложнее).

Вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи, приведенные в контрольных работах, подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор варианта делают или сами учащиеся (с учетом самооценки), или учитель (с учетом успеваемости учеников).

Оценка контрольной работы может быть осуществлена следующим образом: при выполнении вариантов 1 и 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При тех же критериях оценки за решение задач вариантов 3 и 4 к набранным баллам добавляется один балл (учитывая большую сложность). Поэтому в случае вариантов 3 и 4 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

В курсе обучения проводится 7 контрольных работ. Работа рассчитана на один урок (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы). После каждой контрольной работы проводится ее анализ и разбор наиболее сложных задач (на это отводится также один урок). Ко всем заданиям контрольной работы приведены ответы.

Тематическое планирование учебного материала

№ урока	Тема урока	Количество часов
Глава 1. Линии (7 ч)		
1.1. Разнообразный мир линий		
1	Историческое введение	1
2, 3	Разнообразные линии	2
1.2. Прямая. Части прямой. Ломаная		
4	Прямая. Части прямой	1
5	Ломаная	1
1.3. Длина линии		
6	Сравнение и измерение длин линий	1
1.4. Окружность		
7	Окружность. Части окружности	1
Глава 2. Натуральные числа (13 ч)		
2.1. Как записывают и читают натуральные числа		
8, 9	Запись и чтение натуральных чисел	2
2.2. Натуральный ряд. Сравнение натуральных чисел		
10	Ряд натуральных чисел	1
11	Сравнение натуральных чисел	1
2.3. Числа и точки на прямой		
12, 13	Координатная прямая. Точки на прямой	2
2.4. Округление натуральных чисел		
14, 15	Приближенные значения чисел	2
2.5. Решение комбинаторных задач		
16—18	Простейшие задачи комбинаторики	3
19, 20	*Контрольная работа № 1 по теме «Натуральные числа. Линии»*	2
Глава 3. Действия с натуральными числами (25 ч)		
3.1. Сложение и вычитание		
21, 22	Сумма и разность натуральных чисел	2

№ урока	Тема урока	Количество часов
23	Прикидки и оценки при сложении и вычитании	1
24, 25	Нахождение неизвестных в равенствах	2
	3.2. Умножение и деление	
26–28	Произведение и частное натуральных чисел	3
29, 30	Решение простейших уравнений	2
31, 32	Решение задач на умножение и деление	2
	3.3. Порядок действий в вычислениях	
33–35	Последовательность действий при вычислениях	3
	3.4. Степень числа	
36, 37	Возведение числа в степень	2
	3.5. Задачи на движение	
38, 39	Задачи на движение в противоположных направлениях	2
40, 41	Задачи на движение в одном направлении	2
42, 43	Задачи на движение по реке	2
44, 45	*Контрольная работа № 2 по теме «Действия с натуральными числами»*	2
	Глава 4. Использование свойств действий при вычислениях (10 ч)	
	4.1. Свойства сложения и умножения	
46, 47	Переместительное и сочетательное свойства	2
	4.2. Распределительное свойство	
48, 49	Распределительное свойство сложения (вычитания) и умножения	2
50	Вынесение общего множителя за скобки	1
	4.3. Задачи на части	
51–53	Задачи, связанные с частями	3
	4.4. Задачи на уравнивание	
54, 55	Решение задач способом уравнивания	2
	Глава 5. Углы и многоугольники (8 ч)	
	5.1. Как обозначают и сравнивают углы	
56, 57	Угол. Сравнение углов	2
	5.2. Измерение углов	
58, 59	Как измеряют углы	2
	5.3. Ломаные и многоугольники	
60, 61	Многоугольники	2

№ урока	Тема урока	Количество часов
62, 63	*Контрольная работа № 3 по теме «Использование свойств действий при вычислениях. Углы и многоугольники»*	2
Глава 6. Делимость чисел (14 ч)		
6.1. Делители и кратные		
64, 65	Делители числа. Наибольший общий делитель чисел	2
66	Кратные числа	1
6.2. Простые и составные числа		
67–69	Числа простые и составные	3
6.3. Свойства делимости		
70, 71	Делимость суммы и произведения	2
6.4. Признаки делимости		
72	Делимость чисел на 2, 5 и 10	1
73	Делимость чисел на 3 и 9	1
74	Делимость чисел на 4 и 8	1
6.5. Деление с остатком		
75–77	Деление чисел с остатком	3
Глава 7. Треугольники и четырехугольники (10 ч)		
7.1. Треугольники и их виды		
78, 79	Виды треугольников	2
7. 2. Прямоугольники		
80, 81	Свойства прямоугольников	2
7.3. Равенство фигур		
82, 83	Равные фигуры	2
7.4. Площадь прямоугольника		
84, 85	Вычисление площади прямоугольника	2
86, 87	*Контрольная работа № 4 «Делимость чисел. Треугольники и четырехугольники»*	2
Глава 8. Дроби (19 ч)		
8.1. Доли		
88, 89	Доли величины	2
8.2. Что такое дробь		
90–92	Понятие дроби	3
8.3. Основное свойство дроби		
93–95	Основное свойство дроби и его применение	3

№ урока	Тема урока	Количество часов
	8.4. Приведение дробей к общему знаменателю	
96–98	Общий знаменатель дробей	3
	8.5. Сравнение дробей	
99–101	Как сравнивают дроби	3
	8.6. Натуральные числа и дроби	
102–104	Связь между натуральными и дробными числами	3
105, 106	*Контрольная работа № 5 по теме «Дроби. Треугольники и четырехугольники»*	2
	Глава 9. Действия с дробями (35 ч)	
	9.1. Сложение и вычитание дробей	
107–111	Сумма и разность дробей	5
	9.2. Смешанные дроби	
112–115	Выделение целой и дробной части в неправильной дроби	4
	9.3. Сложение и вычитание смешанных дробей	
116–119	Сумма и разность смешанных дробей	4
	9.4. Умножение дробей	
120–124	Произведение дробей	5
	9.5. Деление дробей	
125–129	Частное при делении дробей	5
	9.6. Нахождение части целого и целого по его части	
130–134	Связь между частью и целым	5
	9.7. Задачи на совместную работу	
135–139	Совместные действия	5
140, 141	*Контрольная работа № 6 по теме «Действия с дробями»*	2
	Глава 10. Многогранники (10 ч)	
	10.1. Геометрические тела и их изображение	
142–144	Изображение геометрических тел	3
	10.2. Параллелепипед	
145, 146	Свойства параллелепипеда	2
	10.3. Объем параллелепипеда	
147–149	Вычисление объема параллелепипеда	3
	10.4. Пирамида	
150, 151	Свойства пирамиды	2

№ урока	Тема урока	Количество часов
Глава 11. Таблицы и диаграммы (8 ч)		
11.1. Чтение и составление таблиц		
152–154	Работа с таблицами	3
11.2. Диаграммы		
155–157	Построение диаграмм	3
11.3. Опрос общественного мнения		
158, 159	Сбор информации	2
Повторение курса 5 класса (11 ч)		
160	Действия с натуральными числами	1
161, 162	Делимость чисел	2
163, 164	Действия с дробями	2
165, 166	Текстовые задачи	2
167, 168	Элементы геометрии	2
169, 170	*Контрольная работа № 7 по теме «Повторение материала курса»*	2

Глава 1. ЛИНИИ

Формируемые УУД: *предметные:* распознавать на чертежах, рисунках прямую, части прямой, окружность; приводить примеры аналогов прямой и окружности в окружающем мире; изображать их с использованием чертежных инструментов, на клетчатой бумаге; измерять с помощью инструментов и сравнивать длины отрезков; строить отрезки заданной длины, проводить окружности заданного радиуса; выражать одни единицы измерения длин через другие; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

1.1. РАЗНООБРАЗНЫЙ МИР ЛИНИЙ

Урок 1. Историческое введение

Цель: рассмотреть вкратце историю возникновения человечества и простейших математических знаний.

Планируемые результаты: получить представление о возникновении простейшей математики.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

По современным научным представлениям, наблюдаемая нами сейчас Вселенная возникла около 14 млрд лет назад в результате сложнейших физических процессов. Первоначально температура Вселенной достигала миллиардов градусов. Постепенно температура понижалась, и возникли простейшие составляющие вещества – элементарные частицы. Спустя примерно миллион лет температура Вселенной понизилась, и из элементарных частиц стали формироваться различные атомы. Сначала возникли самые легкие химические элементы – гелий и водород. Постепенно Вселенная охлаждалась все сильнее и образовывались более тяжелые элементы. Все существующее во Вселенной, от крупнейших галактик до мельчайших живых организмов, состоит из химических элементов.

В ходе этих процессов и дальнейшего остывании Вселенной основную роль начинает играть сила тяготения (притяжения). Эта сила приводит к объединению вещества в крупные и огромные скопления – планеты, звезды, галактики. В частности, формирование Солнечной системы и Земли началось около 4,6 млрд лет назад. На заре своего существования Солнечная система выглядела совсем не так, как она выглядит сейчас. Считается, что Солнечная система была гораздо компактнее по размеру. Постепенно Солнечная система приняла современный вид, хотя, разумеется, ее изменение происходит постоянно.

Около 4 млрд лет назад на нашей планете сложились условия, подходящие для возникновения простейших форм жизни. Примерно 1,2 млрд лет назад помимо одноклеточных образований возникли многоклеточные, а затем и простейшие организмы. Около 600 млн лет назад появились животные и наземные растения. Примерно 300 млн лет назад началась эра динозавров, а затем около 200 млн лет назад – эра млекопитающих.

Наконец, примерно 2,5 млн лет назад появились древнейшие люди – далекие предки современного человека. Около 40 тыс. лет назад появился человек современного типа.

Мы говорили сейчас об огромных временных промежутках – от миллиардов до тысяч лет. Чтобы их осмыслить, условно примем время существования Вселенной за 1 год и пересчитаем хронологию приведенных событий (см. таблицу).

Событие	Время (назад)
Возникновение Вселенной	1 год
Формирование Солнечной системы и Земли	4 месяца
Появление многоклеточных организмов	1 месяц
Появление первых животных и наземных растений	15 дней
Появление динозавров	7 дней
Появление млекопитающих животных	5 дней
Появление первых представителей человеческого рода	1,8 часа
Появление предков современного человека	20–30 секунд
Современность	0

Из таблицы видно, что современное человечество существует ничтожно мало по сравнению с возрастом Вселенной. Так как же математика за столь короткое время прошла гигантский путь от зарождения счета на пальцах до доказательства сложнейших теорем?

Самыми древними способами добычи пропитания для человека были охота и собирательство. Ученые, исследовавшие пещеры во Франции и Испании, обнаружили наскальные рисунки (изображения воинов, животных, сцен охоты), созданные 15 тыс. лет назад. Эти изображения свидетельствуют о том, что древним художникам было присуще чувство формы: они смогли передать облик и характер животных, на которых они охотились. Примерно в это же время возник счет конкретных предметов: животных, деревьев, жилищ и т. д. При этом люди использовали пальцы, камешки, веточки. Абстрактного понятия числа еще не возникло: еще не было понимания, что три человека и три дерева – это одинаковое число предметов. Когда численность человечества выросла настолько, что охота и собирательство перестали давать достаточно пропитания, люди перешли к следующей ступени общественного развития – огородничеству и земледелию. Это привело к появлению простейшей математики, связанной с практическими задачами. Необходимо было контролировать поголовье скота; урожай продуктов земледелия; строить жилища, каналы для полива; определять сроки посева и сбора урожая и т. д.

В первую очередь математика развивалась в странах Востока: Египте и Вавилоне. Это связано с более благоприятными природными условиями: субтропическим климатом; наличием великих рек: Нил, Тигр, Евфрат; плодородностью земли в районах этих рек (ильные отложения, полив и т. д.). Поэтому в этих странах около

6000 лет назад существовали понятия о натуральных числах и действиях с ними; о линиях и простейших геометрических фигурах.

Заметим, что бурное развитие математических знаний нашло воплощение в реальных делах. Например, около 26 веков до н. э. за 20 лет была построена пирамида Хеопса – одно из чудес света, которое и сейчас поражает туристов. Приведем некоторые данные: в основании пирамиды лежит квадрат со стороной 230 м, ее высота – 146 м (высота современного пятидесятиэтажного дома). При строительстве было использовано 2,5 млн блоков, средней вес которых около 3 т (хотя есть и блоки весом более 100 т). Стройку вели более 100 тыс. человек.

Другим примером является Великая Китайская стена, которая строилась в III в. до н. э. для защиты от кочевников. Сначала были построены отдельные участки стены около поселений, затем эти участки были соединены. Заключительный этап строительства длился 10 лет, в нем участвовало свыше 1 млн человек. В результате было создано строение высотой около 8 м, шириной 6 м и длиной почти 10 тыс. км (больше расстояния от Москвы до Владивостока).

Понятно, что для планирования, организации, обеспечения такой стройки требуются колоссальные знания, требующие наличия хорошо развитой математики.

Необходимо отметить, что возникновение и развитие математики было чрезвычайно сложным по следующим причинам:

1) знания возникали в разное время в разных районах Земли, связь между которыми и передача знаний практически отсутствовала;
2) знания тщательно оберегались, к ним имел доступ ограниченный круг людей. Например, в Древнем Египте к обучению допускались только жрецы после тщательного испытания;
3) знания часто утрачивались в результате войн, природных катастроф;
4) знания были эмпирическими и мало обоснованными, что часто приводило к их ошибочности. При этом, естественно, развитие науки заходило в тупик. Например, ранее считалось, что геометрические фигуры с одинаковым периметром имеют равные площади.

Несмотря ни на что наука (в частности математика) развивалась. Всего за 120 веков существования более-менее разумного человечества наука и техника достигли небывалых высот. Появились мощные компьютеры, роботы, гаджеты, мобильные устройства, новые информационные технологии, высокоскоростные автомобили, ракеты с огромной мощностью двигателей. Люди начали исследовать космос, создали гибриды растений, научились выращивать искусственные органы и делать многое другое.

По мере изучения предмета мы будем знакомить учащихся с историей возникновения и развития математики.

Уроки 2, 3. Разнообразные линии

Цель: подготовить учащихся к изучению геометрии, рассмотреть простейшие геометрические фигуры – линии.

Планируемые результаты: научиться отличать различные виды линий.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Одним из важнейших разделов математики является геометрия. Древнегреческое слово «геометрия» переводится как «землемерие». Познания в геометрии древние греки применяли для измерения площади земельных участков, строительства дорог, оросительных каналов и других сооружений.

Постепенно человечество накапливало знания, и геометрия стала последовательной и строгой математической наукой. Геометрия изучает свойства (форму и размеры) фигур. Например, золотая монета и крышка железной кастрюли являются кругами разных размеров. При этом материал, вес и стоимость этих предметов для геометрии никакого значения не имеют.

Геометрия – одна древнейших наук. Известные письменные источники, связанные с геометрическими вычислениями, были составлены в Египте и Вавилоне около 4 тыс. лет назад.

Обсуждение любого вопроса должно начинаться с установления общих для всех понятий. Например, при посещении театра все зрители должны знать, что такое ряд и номер места в ряду, а также откуда производится отсчет. Поэтому пятый класс относительно легко рассадить по своим местам в театре, а группу дошкольников – вряд ли удастся.

Строго определить первичные понятия невозможно в силу их первоначальности, исходности. Легко определяется частный случай общего понятия. Например, равнобедренный треугольник – треугольник, у которого две стороны имеют одинаковую длину. Поэтому для первичных понятий приходится пользоваться только некоторыми абстракциями и аналогиями.

Точка – самая простая геометрическая фигура. Представление о ней дает звезда на ночном небе, удаленный фонарик, острый кончик иголки и т. д. Точка – единственная фигура, которую нельзя разбить на части. На рисунке 1 изображен круг, который легко разбить на две (или несколько) частей.

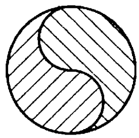


Рис. 1

Даже о фигуре, состоящей из двух точек (рис. 2), можно сказать, что она состоит из двух частей: точки A и точки B. Предполагается, что точка не имеет размеров.

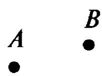
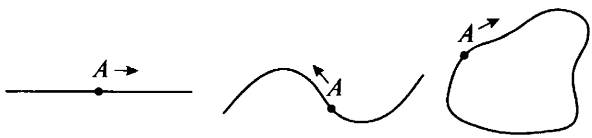


Рис. 2

Представление о ***линии*** дает след движущейся точки. Например, след карандаша на бумаге, мела на доске, раскаленного и брошенного уголька. Представление о линии дают и реальные предметы: край лезвия сабли, веревка, лежащая на полу, человеческий волос. Полагают, что линия имеет длину и не имеет ширины (рис. 3). Линия безгранична, т. е. не имеет начальной и конечной точек (в отличие от отрезка или луча). Другими словами, если выбрать на линии любую точку A, то от нее можно двигаться в любом направлении по этой линии неограниченно.



а **б** **в**

Рис. 3

Все точки одинаковые, и одна точка от другой ничем не отличается. Несмотря на то, что линии можно рассматривать как множество точек, линии имеют самый различный вид. Можно попытаться как-то систематизировать линии по внешнему виду.

Линии замкнутые и незамкнутые

На рисунке 4 приведены замкнутые (*а*, *б*) и незамкнутые (*в*, *г*) линии.

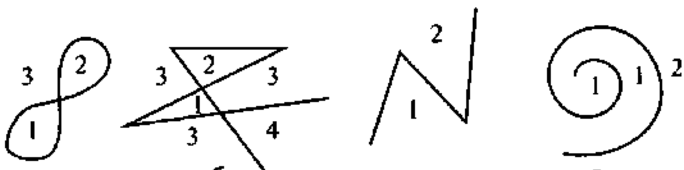
а б в г

Рис. 4

Если выбрать любую точку *A* на линии и двигаться вдоль этой линии в одном направлении, то в случае замкнутой линии вновь попадаем в точку *A*. В случае незамкнутой линии это сделать невозможно.

Линии самопересекающиеся и линии без самопересечений

На рисунке 5 представлены самопересекающиеся линии (*а*, *б*) и линии без самопересечений (*в*, *г*).



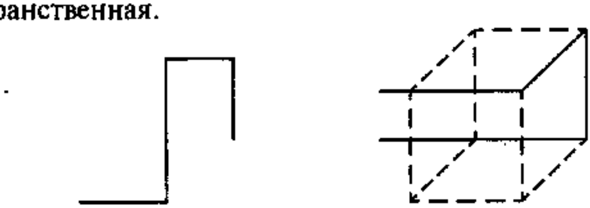
а б в г

Рис. 5

Любая линия делит плоскость на две или более частей. На рисунке 5, *а* – три части, на рисунке 5, *б* – четыре части, на рисунке 5, *в*, *г* – две части. Сама линия является границей между этими частями плоскости. Чтобы из одной части попасть в другую, надо обязательно пересечь границу. Разумеется, попасть из одной точки в другую в одной и той же части плоскости можно не пересекая никаких границ.

Линии плоские и пространственные

На рисунке 6, *а* показана плоская линия, на рисунке 6, *б* – пространственная.



а б

Рис. 6

Все точки плоской линии (рис. 6, *а*) находятся в одной плоскости. Для пространственной (или неплоской) линии (рис. 6, *б*, сплошная линия) ***не все*** точки лежат в одной плоскости.

III. Контрольные вопросы

1. Что изучает геометрия?
2. Поясните понятие точки.
3. Понятие и свойства линии.
4. Замкнутые и незамкнутые линии.
5. Самопересекающиеся линии и линии без самопересечений.
6. Плоские и пространственные линии.

IV. Задание на уроках

№ 1, 4–6, 10, 12 (а, б), 13 (б), 14 (а).

V. Творческие задания

1. Дайте характеристику линий, приведенных на рисунке 7, *а–к*. Определите число частей, на которые линия разбивает плоскость.

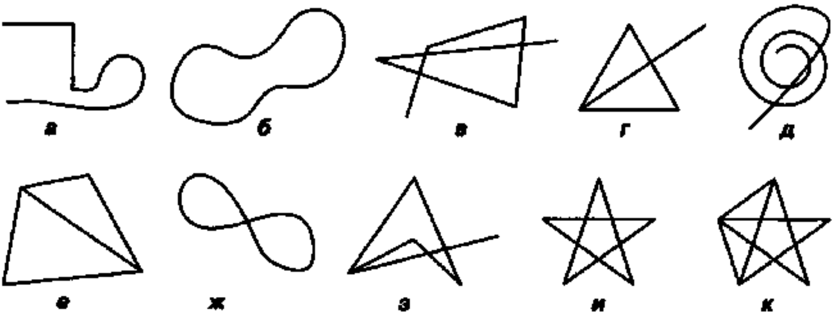


Рис. 7

2. Приведите пример (нарисуйте) линии:
   а) замкнутой;
   б) незамкнутой;
   в) самопересекающейся;
   г) без самопересечений;
   д) замкнутой самопересекающейся;
   е) незамкнутой самопересекающейся;
   ж) самопересекающейся в двух точках;
   з) самопересекающейся в трех точках.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 2, 3, 7–9, 11, 12 (б, г), 13 (в), 14 (б).

1.2. ПРЯМАЯ. ЧАСТИ ПРЯМОЙ. ЛОМАНАЯ

Урок 4. Прямая. Части прямой

Цель: начать изучение одной из самых распространенных линий — прямой.

Планируемые результаты: получить понятие о прямой и ее частях.

Тип урока: урок открытия нового знания.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Нарисуйте какую-нибудь линию, имеющую две точки самопересечения.

2) Дайте характеристику линии, представленной на рисунке 8.

Рис. 8

3) В книге 250 страниц. В первый день Витя прочитал 40 страниц, во второй день – в 3 раза больше, чем в первый. Сколько страниц ему осталось прочитать?

Вариант 2

1) Нарисуйте замкнутую линию, имеющую одну точку самопересечения.

2) Дайте характеристику линии, представленной на рисунке 9.

Рис. 9

3) В книге 300 страниц. В первый день Витя прочитал 120 страниц, во второй день – в 2 раза меньше, чем в первый. Сколько страниц ему осталось прочитать?

III. Работа по теме урока

Одной из наиболее распространенных линий является ***прямая***. Представление о прямой дает сильно натянутая веревка, линия сгиба бумаги, траектория узкого луча лазера и т. д.

Прямые проводят с помощью линейки. При этом надо понимать, что прямая неограниченно продолжается в обе стороны. Проводя прямую на листе бумаги, мы показываем только ее часть.

Прямую принято обозначать или по любым двум точкам A и B, лежащим на прямой (рис. 10, *а*, прямая AB или прямая BA), или одной маленькой буквой латинского алфавита (рис. 10, *б*, прямая a, прямая m).

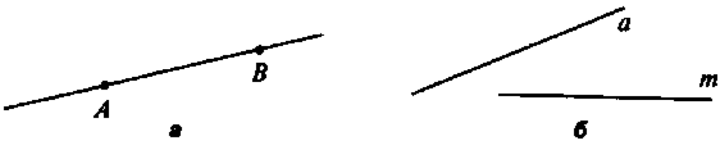


Рис. 10

Отметим некоторые очевидные, но тем не менее важные ***свойства*** прямой:

1) на плоскости существует бесконечное множество точек как принадлежащих, так и не принадлежащих данной прямой a (рис. 11).

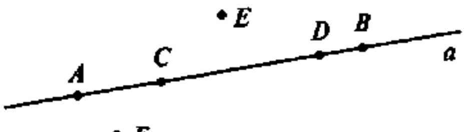


Рис. 11

2) Через любую точку A плоскости можно провести бесконечное множество прямых (рис. 12).

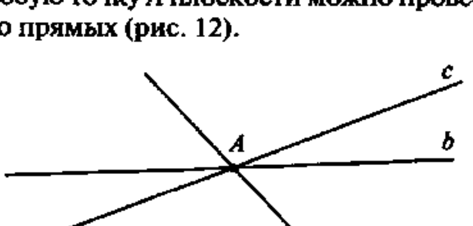


Рис. 12

3) Через две точки A и B плоскости можно провести только одну единственную прямую a (рис. 13).

Рис. 13

4) Две прямые a и b могут:

а) пересекаться в одной точке A – пересекающиеся прямые (рис. 14, *а*);

б) не пересекаться (не иметь общих точек) – параллельные прямые (рис. 14, *б*);

в) совпадать (иметь бесконечное множество общих точек) – совпадающие прямые (рис. 14, *в*).

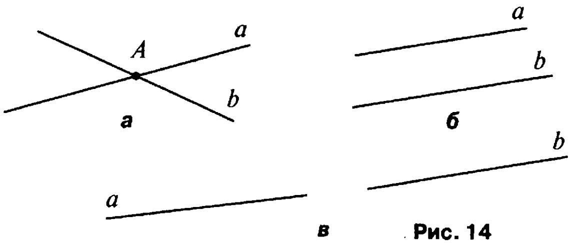


Рис. 14

Других случаев взаимного расположения двух прямых на плоскости быть не может.

На прямой a отметим точку O (рис. 15). Эта точка разбивает прямую на две части, которые идут от точки O в разные стороны (по двум направлениям). Каждая из этих частей называется ***лучом***, точка O – ***началом*** лучей.

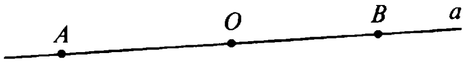


Рис. 15

Чтобы различать эти лучи, указывают еще одну точку, принадлежащую лучу (как и в случае с прямой) – лучи OA и OB. При этом первая буква всегда соответствует началу луча – точке O.

Теперь на прямой a отметим две точки A и B (рис. 16). Часть прямой, ограниченную этими точками, называют отрезком. Отрезок обозначают точками, соответствующими его концам, – отрезок AB или BA (порядок букв, как и для прямой, не важен).

Рис. 16

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие прямой линии.

2. Как обозначают прямые?
3. Основные свойства прямой.
4. Взаимное расположение двух прямых.
5. Понятие луча и его обозначение.
6. Отрезок и его обозначение.

V. Задание на уроке

№ 15, 17 (1, 3), 18, 22, 27 (а), 28 (б, в), 29 (а).

VI. Творческие задания

1. Назовите прямые, лучи и отрезки, представленные на рисунке 17.

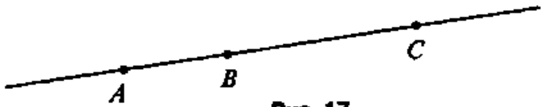


Рис. 17

2. Постройте точку пересечения прямых *a* и *b* (рис. 18, *а*, *б*).

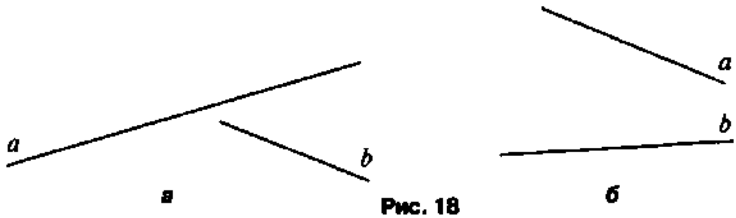


Рис. 18

3. Постройте (если возможно) точку пересечения лучей *AB* и *CD* (рис. 19 *а*, *б*).

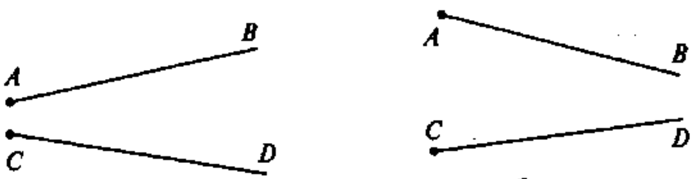


Рис. 19

4. С помощью построения определите, лежат ли отрезки *AB* и *CD* на одной прямой (рис. 20).

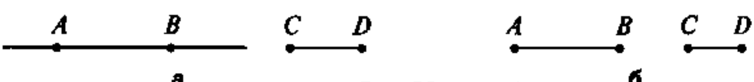


Рис. 20

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 16, 17 (2, 4), 23, 27 (б), 28 (г, д), 29 (б).

Урок 5. Ломаная

Цель: дать понятие ломаной.

Планируемые результаты: уметь различать различные виды ломаной.

Тип урока: урок рефлексии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Приведите примеры лучей в окружающем мире.

2) Перечислите прямую, лучи и отрезки, изображенные на рисунке 21.

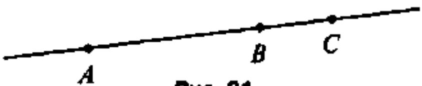


Рис. 21

3) Постройте точку пересечения луча *OA* и прямой *a* (рис. 22).

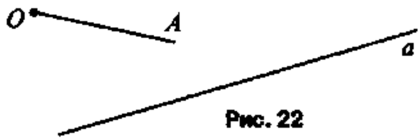


Рис. 22

Вариант 2

1) Приведите примеры отрезков в окружающем мире.

2) Перечислите прямую, лучи и отрезки, изображенные на рисунке 23.

Рис. 23

3) Постройте точку пересечения прямой *a* и луча *OB* (рис. 24).

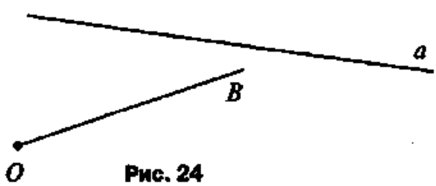


Рис. 24

III. Работа по теме урока

Ломаной *ABCDE*... называют фигуру, состоящую из отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, ... (рис. 25, *а*). При этом отрезки *AB*, *BC*, *CD*, *DE* называют сторонами или звеньями, а точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* – вершинами ломаной. Ломаную называют ***простой***, если она не имеет самопересечений (рис. 25, *а*). Ломаную называют ***замкнутой***, если у нее концы совпадают (рис. 25, *б*, *в*). При этом ломаная может не иметь (рис. 25, *б*) или иметь (рис. 25, *в*) точки самопересечения.

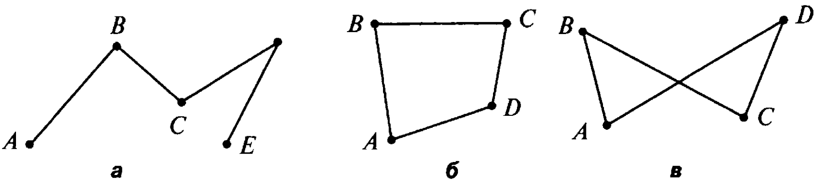


Рис. 25

Простая замкнутая ломаная называется ***многоугольником***, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой. На рисунке 26 приведены некоторые многоугольники. Если многоугольник имеет *n* вершин (и, соответственно, *n* сторон), то его называют *n*-угольником. На рисунке представлены треугольник (рис. 26, *а*), четырехугольники (рис. 26, *б*, *в*), пятиугольники (рис. 26, *г*, *д*).

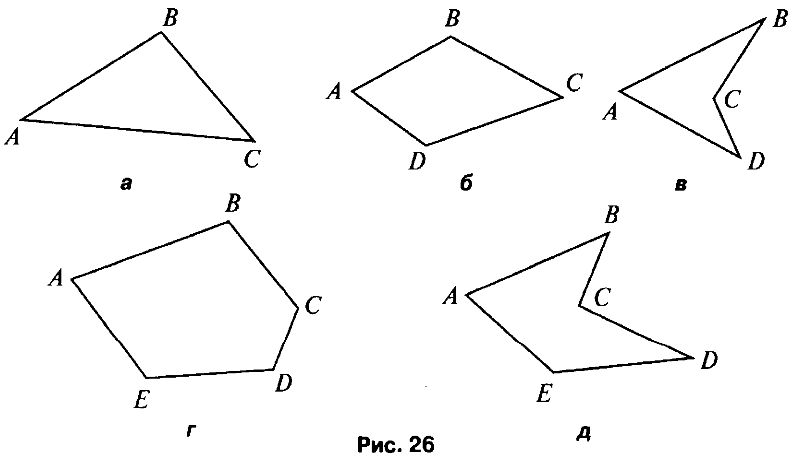


Рис. 26

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие ломаной. Приведите примеры ломаной.
2. Простая ломаная.
3. Многоугольник. Вершины и стороны.
4. Приведите примеры многоугольников.

V. Задание на уроке

№ 19, 20, 22, 24, 25 (а).

VI. Творческие задания

1. Наиболее полно охарактеризуйте ломаную (рис. 27).

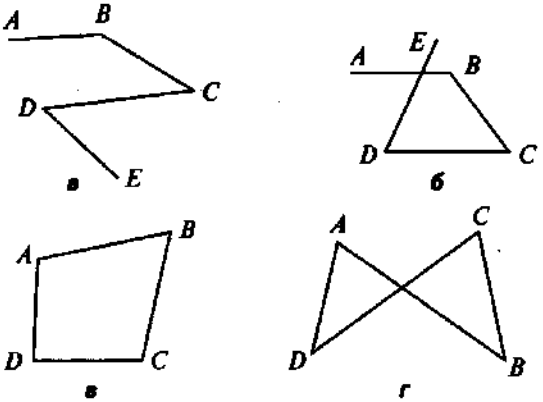


Рис. 27

2. Дайте характеристику многоугольников и назовите эти многоугольники (рис. 28).

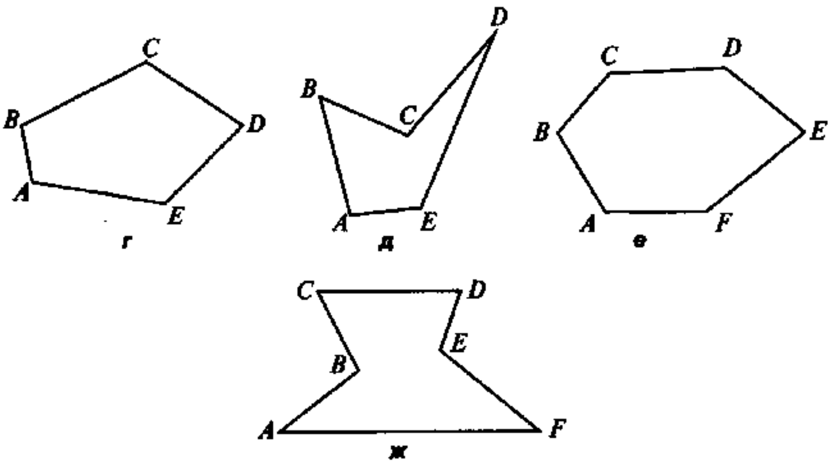


Рис. 28

3. Используя рисунок 28, *а–ж*, установите, чем отличаются четырехугольники б) и в), пятиугольники г) и д), шестиугольники е) и ж).

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 21, 23, 26.

1.3. ДЛИНА ЛИНИИ

Урок 6. Сравнение и измерение длин линий

Цель: научиться сравнивать и измерять длины линий.

Планируемые результаты: узнать единицы измерения длины, уметь измерять длины линий.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Нарисуйте незамкнутую ломаную, состоящую из четырех звеньев и имеющую одну точку самопересечения. Перечислите стороны и вершины ломаной.

2) Объясните, почему ломаная, изображенная на рисунке 29, не является многоугольником (две причины).

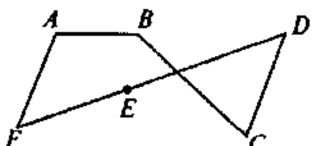


Рис. 29

3) Охарактеризуйте приведенный на рисунке 30 многоугольник и постройте точку пересечения прямых BC и AD.

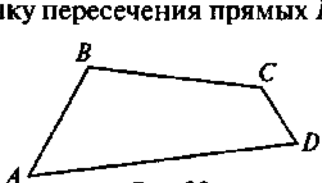


Рис. 30

Вариант 2

1) Нарисуйте незамкнутую ломаную, состоящую из пяти звеньев и имеющую одну точку самопересечения. Перечислите стороны и вершины ломаной.

2) Объясните, почему ломаная, изображенная на рисунке 31, не является многоугольником (две причины).

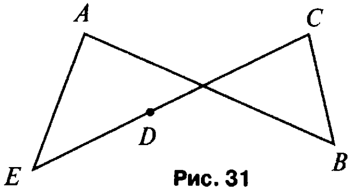


Рис. 31

3) Охарактеризуйте приведенный на рисунке 32 многоугольник и постройте точку пересечения прямых AB и ED.

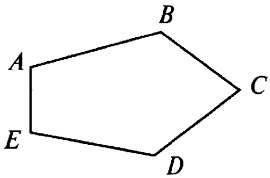


Рис. 32

III. Работа по теме урока

Отрезки можно сравнивать, т. е. устанавливать, равны ли они, а если нет, то какой из них длиннее, а какой – короче (рис. 33). Это можно сделать или непосредственным наложением отрезков друг на друга (совместив концы отрезков и направив отрезки вдоль друг друга), или с помощью циркуля.

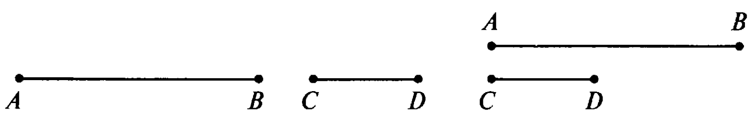


Рис. 33

Разумеется, сравнивать отрезки можно лишь при их расположении рядом друг с другом. В противном случае необходимо научиться измерять длину отрезка. Например, ученый из Австралии и ученый из Африки сообщили о поимке удавов уникальной длины. Хотелось бы выяснить, какой из удавов длиннее. Перевозка животных дело хлопотное. Поэтому необходимо удавов измерить, т. е. сравнить с длиной некоторого общепринятого эталона, принятого за единицу измерения.

К единице измерения предъявляются определенные требования. Можно, конечно, как в мультфильме, мерить длину удава в попугаях. Но есть ряд осложнений. Попугаи разных пород имеют разную длину. Во многих местах (например, в Антарктиде) попугаи не живут. И, наконец, при измерении удава попугай может и не дожить до конца измерения. Поэтому единица измерения должна быть универсальной (стабильной), общедоступной и долговечной.

Разумеется, современные единицы измерения возникли не сразу. За свою историю человечество придумало огромное количество единиц, причем каждый народ имел свои единицы измерения.

Например, английский король Генрих I ввел в 1101 г. единицу длины ***ярд*** – расстояние от кончика своего носа до большого пальца вытянутой руки (сейчас считают, что ярд составляет 91 см). ***Фут*** определялся как средняя длина ступней 16 англичан, выходящих из храма в воскресенье (считается, что фут равен 30,5 см). Для измерения больших расстояний использовалась ***миля***, которая была очень распространена во многих странах. В Древнем Риме милю определяли как тысячу двойных шагов вооруженного римского воина. Она равнялась 1481 м. В настоящее время миля в основном используется в морском деле; морская миля равна 1852 м. Для измерения небольших длин употреблялся ***дюйм***. В 1324 г. король Англии Эдуард II определил дюйм как длину сустава большого пальца взрослого мужчины (1 дюйм = 2,54 см). Заметим, что эти единицы – миля, ярд, фут, дюйм – используются в Великобритании до сих пор.

На Руси тоже были весьма своеобразные единицы длины. ***Локоть*** упоминается в рукописях с XI в. Он определяется как расстояние от локтевого сгиба до конца среднего пальца руки (около 50 см). Также давно при измерениях использовалась ***пядь*** – расстояние между концами растянутых большого и указательного пальцев (примерного 18 см). Купцы мерили ткани в аршинах. ***Аршин*** определялся как длина всей вытянутой руки от плечевого сустава до конца среднего пальца (около 71 см). Начиная с XI в., большие расстояния измерялись в верстах. ***Верстой*** считалось расстояние от одного поворота плуга до другого во время пахоты. Считается, длина версты 1060 м.

Понятно, что рассмотренные меры длины были очень неопределенными. Разумеется, что измерять в ярдах длину бревна с помощью короля Генриха I вряд ли кто-нибудь рискнул бы. Мерить расстояние в верстах от Москвы до Петербурга, вспахивая шоссе и поворачивая плуг, мягко говоря, тоже не очень удобно.

Соотношения между единицами длины были самыми разнообразными в разные времена и в разных странах. Это вносило большую неразбериху и значительное неудобство. С развитием торговых, научных, культурных связей между государствами возникла необходимость в создании общих эталонов. В разные времена предпринимались неоднократные попытки.

Наконец, в конце XVIII в. во Франции была принята метрическая система. В качестве основной единицы измерения длины был выбран ***метр***, который определили как одну сорокамиллионную часть длины Парижского меридиана. Эталон метра – платиновую линейку шириной 25 мм и толщиной 4 мм изготовили в 1799 г. Метрическая система постепенно вытеснила местные и национальные системы. В 1875 г. законом метрическая система была принята в 17 странах, включая и Россию. Широкое распространение в России метрическая система получила после 1918 г.

Итак, в метрической системе единиц основной единицей длины является ***метр***. Для удобства существуют и другие единицы, связанные с метром: километр, дециметр, сантиметр, миллиметр и т. д. Приведем соотношение между этими единицами: 1 км = 1000 м, 1 м = 10 дм, 1 дм = 10 см, 1 см = 10 мм.

Также приведем связь между старыми русскими и современными мерами: 1 верста = 1060 м, 1 сажень = 213,5 см, 1 аршин = = 71 см, 1 локоть = 50 см, 1 пядь = 18 см, 1 вершок = 4,5 см.

Полезно знать соотношение между английскими и русскими единицами длины: 1 миля = 1852 м, 1 ярд = 91 см, 1 фут = 30,5 см, 1 дюйм = 2,5 см (менее распространенные меры не приводятся).

Для измерения ***длин отрезков*** используют линейку. Под длиной отрезка AB понимают расстояние между граничными точками A и B отрезка. Например, на рисунке приведены отрезки длиной 1 см (рис. 34, *а*), 5 см (рис. 34, *б*) и 10 см (рис. 34, *в*).

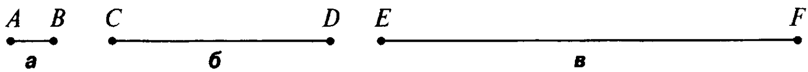


Рис. 34

Легко также найти ***длину ломаной*** – она равна сумме длин отрезков, ее составляющих: $AB + BC + CD + DE$ (рис. 35).

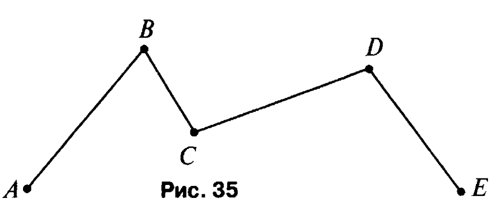


Рис. 35

Гораздо сложнее измерить длину ***криволинейного отрезка***. Люди придумали много способов таких измерений. Один из простых способов – выложить вдоль кривой нитку, затем распрямить ее и измерить ее длину. Очень продуктивным способом решения задачи измерения кривой является ***замена кривой ломаной***, вершины которой расположены на ней (рис. 36). При этом длина кривой и длина ломаной с некоторой точностью совпадают. Увеличивая число точек на кривой, можно неограниченно повышать точность измерения длины кривой.

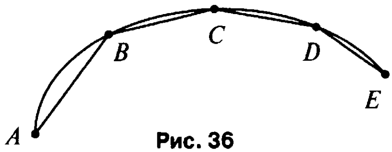


Рис. 36

Первый способ (с помощью нитки) очень удобен для практических измерений. Второй способ (с помощью замены кривой на ломаную) привел к четкому пониманию длины части любой линии и принципиально важному этапу развития математики.

IV. Контрольные вопросы

1. Поясните, как можно сравнить два отрезка.
2. Что называют измерением длины отрезка?
3. Расскажите о старинных единицах измерения.
4. Метрическая система единиц и ее преимущества.
5. Что называют длиной отрезка AB?
6. Чему равна длина ломаной?
7. Как можно измерить длину кривой?

V. Задание на уроке

№ 30 (1), 31 (б), 33, 35, 36 (а–в), 38, 39 (1, 2), 41, 45 (а).

VI. Творческие задания

1. Двести лет назад англичанин, русский и француз (по отдельности) пошли гулять. Кто из них прошел большее расстояние, если:

а) англичанин прошел одну милю, русский – одну версту, француз – один километр;

б) англичанин прошел две мили, русский – четыре версты, француз – три километра?

2. Измерьте расстояние от вашего дома до школы шагами (подсчитайте число шагов). Считая, что длина шага 70 см, найдите это расстояние в сантиметрах.

3. На прямой расставлены 20 точек. Найдите расстояние между крайними точками, если расстояние между двумя любыми соседними точками равно:

а) 5 см;

б) 10 см.

4. Периметром многоугольника называют сумму длин его сторон. Найдите периметр, если:

а) стороны треугольника равны и длина каждой стороны составляет 7 см;

б) длины сторон треугольника равны 20 см, 23 см и 27 см.

в) длины двух сторон треугольника равны 15 см и 18 см, а длина третьей стороны на 7 см меньше суммы длин первых двух сторон.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 30 (2), 31 (а), 32, 34, 36 (г, д), 37, 39 (3, 4), 42 (а), 45 (б).

1.4. ОКРУЖНОСТЬ

Урок 7. Окружность. Части окружности

Цель: дать понятия окружности и ее частей.

Планируемые результаты: изучить элементы окружности.

Тип урока: урок открытия нового знания.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Ломаная состоит из пяти звеньев длиной 7 см, 3 см, 6 см, 9 см и 12 см. Найдите длину ломаной.

2) Найдите длину отрезка BC, если $AD = 23$ см, $AB = 15$ см, $CD = 19$ см (рис. 37).

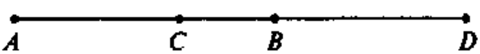


Рис. 37

3) Две стороны треугольника имеют длину 18 см и 21 см, его периметр равен 62 см. Найдите третью сторону треугольника.

Вариант 2

1) Ломаная состоит из пяти звеньев длиной 4 см, 8 см, 7 см, 10 см и 13 см. Найдите длину ломаной.

2) Найдите длину отрезка BC, если $AD = 25$ см, $AB = 17$ см, $CD = 34$ см (рис. 38).

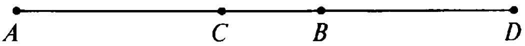


Рис. 38

3) Две стороны треугольника имеют длину 16 см и 23 см, его периметр равен 58 см. Найдите третью сторону треугольника.

III. Работа по теме урока

Наряду с прямой, окружность известна человечеству с древнейших времен. Благодаря понятию окружности появились круглые катки (которые использовались при перемещении тяжелых грузов), колеса и устройства на их основе (тачки, телеги и др.). Даже сейчас для езды не придумано ничего лучше колеса. Не случайно древние египтяне и греки считали окружность идеальной линией.

Окружностью называют замкнутую линию без самопересечений, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от одной точки O – центра окружности ($OA = OB = OC$). При этом отрезок, который соединяет центр окружности с точкой, расположенной на ней, называют ***радиусом***. На рисунке OA, OB, OC – радиусы окружности. Отрезок, который соединяет две точки окружности и проходит через ее центр, называют ***диаметром*** (на рисунке 39 отрезок AD – диаметр). Очевидно, что диаметр окружности равен двум ее радиусам: $AD = 2OA = 2OB = 2OC = 2OD$.

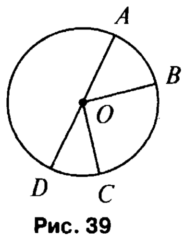


Рис. 39

Часть окружности, ограниченную двумя точками, называют ***дугой***. Например, на рисунке изображены дуги AB, AC, BC, BD и т. д.

Для построения окружности с центром в данной точке O и заданным радиусом r используют специальное устройство – ***циркуль***.

Окружность разбивает плоскость на две области – внешнюю и внутреннюю. Внутренняя часть области и окружность (граница) образуют фигуру, которую называют ***кругом*** (рис. 40, *а*). В геометрии часто рассматривают и другую фигуру — ***сектор***. Часть круга, ограниченную двумя радиусами и дугой, заключенной между ними, называют ***сектором*** (рис. 40, *б*).

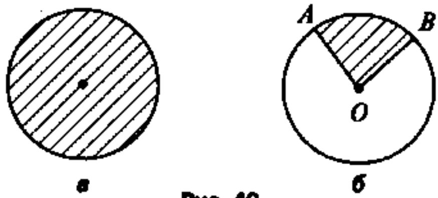


Рис. 40

Полезно иметь представление о взаимном расположении изученных линий: прямых и окружностей.

Прямая и окружность могут не иметь общих точек (рис. 41, *а*). Прямая и окружность могут иметь только одну общую точку (рис. 41, *б*). В этом случае прямая касается окружности. И, наконец, прямая и окружность могут иметь две общие точки (рис. 41, *в*). Тогда прямая пересекает окружность. Других случаев расположения прямой и окружности не существует.

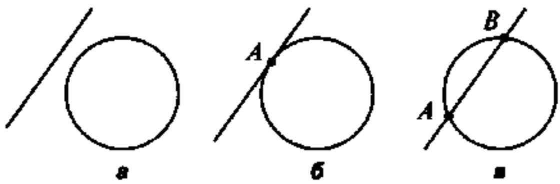


Рис. 41

Аналогичные случаи имеют место и при взаимном расположении двух окружностей. Окружности могут не иметь общих точек (рис. 42, *а*, *б*).

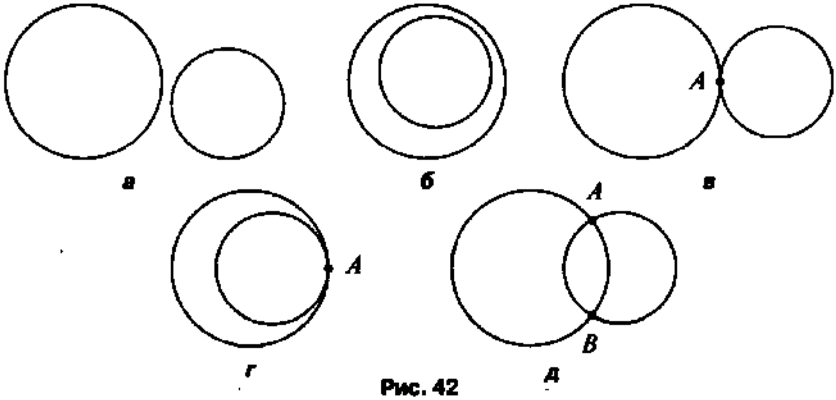


Рис. 42

Окружности могут иметь только одну общую точку (рис. 42, *в*, *г*). В этом случае окружности касаются друг друга (рис. 42, *в* – внешнее касание, рис. 42, *г* – внутреннее касание). Окружности могут иметь две общие точки (рис. 42, *д*). Тогда окружности пересекаются. Других случаев расположения двух окружностей не существует.

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение окружности.
2. Радиус и диаметр окружности.
3. Понятие дуги окружности.
4. Круг и сектор.
5. Взаимное расположение прямой и окружности.
6. Расположение двух окружностей.

V. Задание на уроке

№ 47, 50, 51, 54, 56, 58 (а, в), 59 (а), 60 (1, 2).

VI. Творческие задания

1. На плоскости приведена окружность радиусом 10 см с центром в точке *O*. Также на плоскости построена точка *A*. Как расположены точка *A* и окружность, если длина отрезка *OA* равна:

а) 7 см;
б) 10 см;
в) 15 см?

2. На окружности радиусом 5 см выбраны точки *A* и *B*. Что можно сказать о расположении точек *A* и *B*, если длина отрезка *AB* равна 10 см.

3. Две окружности радиусом 3 см и 7 см касаются друг друга. Найдите расстояние между центрами окружностей, если:

а) касание внешнее;
б) касание внутреннее.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 46, 49, 52, 53, 55, 58 (б, г), 59 (б), 60 (3, 4).

Глава 2. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Формируемые УУД: предметные: читать и записывать натуральные числа, сравнивать и упорядочивать их; описывать свойства натурального ряда; чертить координатную прямую, изображать числа точками на координатной прямой, находить координаты отмеченной точки; округлять натуральные числа; решать комбинаторные задачи с помощью перебора всех возможных вариантов; моделировать ход решения с помощью рисунка, с помощью дерева возможных вариантов; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

2.1. КАК ЗАПИСЫВАЮТ И ЧИТАЮТ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Уроки 8, 9. Запись и чтение натуральных чисел

Цель: ознакомиться с десятичной системой счисления.

Планируемые результаты: оценить преимущества десятичной позиционной системы записи чисел.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

С возникновением и развитием продуктивной деятельности появилась потребность в подсчете продуктов труда, а затем и в расчетах и планировании трудовой деятельности. Первоначально понятие числа носило скорее качественный, чем количественный характер, так как не было потребности в подсчете большого числа предметов: один мамонт, два топора, три охотника и много деревьев.

Развитие ремесла, обмена и торговли содействовало уточнению понятию числа. Числа группировали и объединяли в большие комбинации, обычно пользуясь тем, что было под рукой, т. е. самими руками. Для подсчета использовались пальцы одной или двух рук. Это вело к счету с основанием пять или десять. Эти вычисления дополнялись сложением, а иногда вычитанием. Так, число 12 воспринималось как 10 + 2, а число 9 – как 10 – 1. Иногда для подсчета использовались пальцы и рук и ног, т. е. использовалась система с основанием 20. Так, при изучении 307 первобытных американских племен выяснилось, что в 146 племенах применялась десятичная система, в 106 – пятеричная, в остальных – двадцатеричная.

Помимо непосредственного подсчета предметов стала возникать необходимость фиксировать результаты этого подсчета. Для этого использовались камешки, палочки, зарубки на палке, узлы на веревке и т. д. Однако при большом числе подсчитываемых предметов такой способ очень не удобен – трудно себе представить палку с 527 зарубками или мешок с 2136 камешками. Возникла необходимость компактной записи чисел, с использованием небольшого числа символов. Понятно, что запись 527 намного удобнее, чем выписывание 527 единиц.

Существовали различные формы записи чисел: египетская, вавилонская, греческая и т. д. Обсудим только римскую запись чисел, так как она (в отличие от многих других) сохранилась и дошла до нас.

Римские цифры появились за 500 лет до н. э. у этрусков, которые могли заимствовать некоторые цифры у древних кельтов.

Для записи базовых чисел приняты следующие символы: 1 – I, 5 – V, 10 – X, 50 – L, 100 – C, 500 –D, 1000 – M; 5000 – $\overline{D}$, 10 000 – $\overline{X}$ и т. д. С помощью этих символов с применением сложения и вычитания записывают и другие числа. При этом используют следующие правила:

- если меньшая цифра стоит после большей, то она складывается с большей: VI – 6, XV – 15, LI – 51;
- если меньшая цифра стоит перед большей, то она вычитается из большей: IX – 9, XL – 40, VC – 95;
- две или три стоящие рядом одинаковые цифры означают, что соответствующие числа складываются: CC – 200, MMM – 3000;
- любую цифру нельзя писать более трех раз.

Существуют и другие правила для записи чисел.

Римская нумерация чисел очень неудобна:

- для записи базовых чисел используют разные символы, которые необходимо помнить;
- не простые правила записи чисел;

- громоздкий вид даже небольших чисел: 283 – CCLXXXIII, 1988 – MCMLXXXVIII и т. д.;
- необходимость при чтении числа устно складывать и вычитать базовые числа, его составляющие;
- невозможность записи больших чисел (для этого надо придумывать новые базовые числа);
- невозможность выполнения даже простейших арифметических операций: сложения, вычитания, умножения и деления чисел.

Несмотря на эти недостатки, римская нумерация сохранилась до сих пор. С ее помощью обозначают века, главы в книге, номер Олимпийских игр и т. д. Но это дань традиции, так как с помощью привычной нам записи чисел можно делать все то же самое и значительно больше.

Все недостатки римской нумерации связаны с тем, что запись чисел не являлась позиционной, т. е. не зависела от местоположения символа. Великим достижением математики стало изобретение и совершенствование ***десятичной позиционной системы*** записи чисел. Такая система появилась в Индии в V в. Для записи любого числа можно было использовать всего десять цифр. Число определялось местоположением (***позицией***) этих ***цифр***. Арабы в это время усиленно занимались торговлей со многими странами, благодаря чему такая система постепенно распространилась по всему миру и в X в. добралась до Европы.

Важнейшим был сам новый ***принцип записи*** любых чисел с помощью ограниченного количества символов (цифр). Поэтому используемые нами цифры 0, 1, 2, ..., 9 стали называться арабскими, хотя они таковыми не являются. Например, цифру 8 арабы изображали символом «Λ», а индийцы – значком «Ꙅ». Так что привычные нам цифры – это осовремененная реализация идей позиционной системы, созданной в Индии и распространенной арабами.

Итак, рассмотрим ***основные положения*** десятичной позиционной системы записи чисел.

1) При записи чисел используют десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2) Принципиально важными являются и сами цифры, используемые в записи числа, и положение (позиция) этих цифр в записи. Например: 123, 132, 213, 231, 312, 321 – шесть различных чисел, записанных с помощью одних и тех же трех цифр: 1, 2 и 3.

3) Позицию цифры в числе называют ***разрядом***. Крайняя справа цифра показывает число в разряде единиц, расположенная ле-

вее – число в разряде десятков, еще левее – число в разряде сотен и т. д.

4) Единица каждого следующего разряда составляет десять единиц предыдущего разряда.

5) Числа удобно записывать поразрядно. Например, запись $3074 = 3 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4$ означает, что число состоит из 3 тысяч, 0 сотен, 7 десятков и 4 единиц.

6) Принято разряды справа налево группировать по три и объединять в классы. Например, в записи числа 38 207 564 937 содержатся четыре класса: класс единиц, класс тысяч, класс миллионов и класс миллиардов. Читают число слева направо: 38 миллиардов 207 миллионов 564 тысячи 937.

Класс миллиардов			Класс миллионов			Класс тысяч			Класс единиц		
	3	8	2	0	7	5	6	4	9	3	7

Заметим, что в повседневной жизни системы счисления используют не только 10 символов. Например, 1 час состоит из 60 минут, 1 минута содержит 60 секунд. Неделя состоит из 7 дней, год содержит 12 месяцев. В вычислительной технике идеальной оказалась двоичная система (символ 1 соответствует наличию сигнала, символ 0 – его отсутствию). В такой системе запись 10101 соответствует числу 21. Однако в повседневной жизни двоичная система неудобна: запись даже небольших чисел выглядит громоздко (например, число 183 записывается в виде 10110111).

Итак, благодаря природе (десять пальцев на руках человека) появилась десятичная система счета. И опять же благодаря природе (появление и развитие разума человека) такая система стала и позиционной. Столетия практики показали исключительное удобство и совершенство десятичной позиционной системы записи чисел.

III. Контрольные вопросы

1. Как люди считали в древности?
2. Базовые римские числа.
3. Как записывают числа, используя римскую нумерацию?
4. Недостатки римской нумерации.
5. Основные положения десятичной позиционной системы.
6. Перечислите классы разрядов чисел.

IV. Задание на уроках

№ 61 (1, 2а–г), 62 (а, б, г), 63 (а–в), 66, 69, 74.

V. Творческие задания

1. Запишите поразрядно числа:

а) 387; в) 403;
б) 6117; г) 5204.

2. Сколько различных трехзначных чисел можно написать, используя цифры:

а) 3, 7, 8; в) 3, 3, 7;
б) 3, 0, 7; г) 3, 0, 0?

Выпишите все такие числа.

3. Напишите наибольшее и наименьшее четырехзначные числа, используя цифры:

а) 3, 6, 7, 8;
б) 0; 3, 6, 7;
в) 3, 3, 7, 8.

4. Вычислите:

а) $100 - 99 + 98 - 97 + ... + 4 - 3 + 2 - 1$;
б) $100 - 99 - 98 + 97 + ... + 4 - 3 - 2 + 1$;
в) $100 + 99 - 98 - 97 + ... + 4 + 3 - 2 - 1$.

5. Запишите и прочитайте все пятизначные числа, сумма цифр в каждом из которых равна 2.

6. Как получить сто, исключив из девяносто десять?

Ответ: в римской нумерации 90 записывается как XC, исключив X (10), получим C (100).

Предлагаемые далее задачи решите, используя спички.

7. Сделайте:

а) из трех четыре (*III и IV*);
б) из трех шесть (*III и VI*);
в) из двух десять (*II и X*);
г) из трех одиннадцать (*III и XI*);
д) из четырех девять (*IV и IX*);
е) из пяти десять (*V и X*).

8. Переложив одну спичку, из неверного равенства получите верное:

а) VI – IV = IX (*VI + IV = X*);
б) XII + IX = II (*XII – IX = III*);
в) X = VII – III (*X – VII = III*);
г) VI – VI = XI (*V + VI = XI*);
д) IV – V = I (*VI – V = I, IV = V – I*);
е) X + X = I (*X – IX = I*).

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 61 (1, 2д–е), 62 (в, д), 63 (г–е), 67, 68, 70, 75.

2.2. НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД. СРАВНЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Урок 10. Ряд натуральных чисел

Цель: рассмотреть натуральные числа и их простейшие свойства.

Планируемые результаты: знать основные понятия, связанные с числами.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Укажите некоторые недостатки римской нумерации.

2) Запишите число 18 римскими цифрами.

3) Напишите число 7304 в виде суммы разрядных слагаемых.

4) Используя цифры 0, 3, 7 по одному разу, выпишите все трехзначные числа. Укажите наименьшее и наибольшее из них.

5) Используя шесть раз цифру 4 и знаки сложения и вычитания, напишите число 492.

Вариант 2

1) Укажите некоторые преимущества десятичной позиционной системы.

2) Запишите число 14 римскими цифрами.

3) Напишите число 2017 в виде суммы разрядных слагаемых.

4) Используя цифры 0, 1, 8 по одному разу, выпишите все трехзначные числа. Укажите наименьшее и наибольшее из них.

5) Используя шесть раз цифру 6 и знаки сложения и вычитания, напишите число 726.

III. Работа по теме урока

Числа, которые используют для счета предметов, называют ***натуральными***: 1, 2, 3, 4, 5, ... Натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют ***натуральный ряд***: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Заметим, что число 0 не является натуральным, так как глупо и бессмысленно производить подсчет ничего.

Отметим ***особенности*** натурального ряда:

1) в натуральном ряду есть наименьшее число (1) и нет наибольшего, т. е. натуральный ряд бесконечен;

2) каждое число натурального ряда, начиная с числа 2, получается из предыдущего прибавлением единицы: $2 = 1 + 1$, $7 = 6 + 1$, $387 = 386 + 1$;

3) у каждого числа, начиная с числа 2, есть предыдущее и последующее: у числа 17 – предыдущее 16, последующее 18; у числа 216 – предыдущее 215, последующее 217;

4) в натуральном ряду чередуются четные и нечетные числа (т. е. числа, делящиеся и не делящиеся на 2): 1, 2, 3, 4, 5, ..., 112, 113, 114, ..., 1381, 1382, 1383, ...

Заметим, что если рассматривать группы натуральных чисел, входящих в ряд, то можно заметить интересные закономерности.

Пример 1. Найдем сумму всех чисел с 1 до 100 натурального ряда:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 96 + 97 + 98 + 99 + 100.$

Легко заметить, что суммы чисел, равноудаленных от концов, равны: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$ и т. д. Так как в каждой такой сумме используются два числа, то таких сумм будет 50. Поэтому сумма всех чисел от 1 до 100 равна $101 \cdot 50 = 5050$.

Пример 2. Теперь будем искать сумму только нечетных чисел и увидим следующие закономерности:

$1 = 1 \cdot 1,$

$1 + 3 = 4 = 2 \cdot 2,$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3 \cdot 3,$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \cdot 4.$

Эта закономерность очевидна: при сложении n первых нечетных натуральных чисел их сумма равна $n \cdot n$ (или n^2). Уловив эту закономерность, легко, например, найти сумму всех нечетных чисел от 1 до 99.

Рассмотрим сто первых натуральных чисел: из них – пятьдесят нечетные и пятьдесят четные. Поэтому в сумму $1 + 3 + 5 + ... + 97 + 99$ входит ровно 50 чисел и их сумма равна $50 \cdot 50 = 2500$.

Заметим, что при решении этой задачи можно было использовать подход, рассмотренный в предыдущем примере.

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие натурального числа.
2. Натуральный ряд.
3. Основные свойства натурального ряда.
4. Четные и нечетные натуральные числа.

V. Задание на уроке

№ 76, 78 (а, г), 79 (а), 81, 92 (а), 99 (а), 100 (б).

VI. Творческие задания

1. Установите закономерность в числах ряда и напишите три следующих числа:

а) 1, 4, 7, 10, ...;
б) 1, 6, 11, 16, ...;
в) 1, 2, 4, 8, ...;
г) 1, 3, 9, 27, ...;
д) 1, 2, 3, 5, 8, ...;
е) 1, 3, 4, 7, 11, ...

2. Найдите сумму чисел:

а) $1 + 3 + 5 + ... + 49$;
б) $2 + 4 + 6 + ... + 50$;
в) $11 + 12 + 13 + ... + 99$;
г) $12 + 14 + 16 + ... + 98$.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 77, 78 (б, в), 79 (б), 80, 92 (б), 99 (б), 100 (а).

Урок 11. Сравнение натуральных чисел

Цель: научиться выбирать меньшее и большее из чисел.

Планируемые результаты: уметь сравнивать числа.

Тип урока: урок рефлексии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Для числа 3764 напишите предшествующее и последующее числа.

2) Пусть n – нечетное число. Каким числом (четным или нечетным) будет число $n + 13$?

3) Установите закономерность в числах ряда: 2, 5, 8, 11, ... и выпишите три следующих числа.

4) Найдите сумму чисел: $21 + 22 + 23 + ... + 48 + 49$.

Вариант 2

1) Для числа 2387 напишите предшествующее и последующее числа.

2) Пусть n – четное число. Каким числом (четным или нечетным) будет число $n + 21$?

3) Установите закономерность в числах ряда: 3, 7, 11, 15, ... и выпишите три следующих числа.

4) Найдите сумму чисел: $31 + 32 + 33 + ... + 68 + 69$.

III. Работа по теме урока

Интуитивно каждый может определить, какое из двух чисел больше и какое меньше. Теперь необходимо интуиции придать более строгое понимание.

Из двух натуральных чисел меньшим считается то число, которое в натуральном ряду выписано раньше, и большим – то, которое выписано позже. Условились считать, что число 0 меньше любого натурального числа.

Результат сравнения двух чисел записывают с помощью знаков < (меньше) и > (больше). Например: $98 < 112$, $317 > 215$, $0 < 3$, $7 > 0$. Таким записи называют неравенствами.

Пример 1. Для четного числа n выполнено неравенство $n < 9$. Перечислим все такие числа n: 2, 4, 6, 8.

Пример 2. Рассмотрим суммы чисел $n = 1 + 3 + 5 + ... + 97 + 99$ и $m = 2 + 4 + 6 + ... + 98 + 100$. Определим, какое из чисел n и m больше, не вычисляя самих чисел. Очевидно, что в числах n и m одинаковое число слагаемых. При этом каждое слагаемое в числе n меньше соответствующего слагаемого в числе m: $1 < 2$, $3 < 4$, $5 < 6$, ..., $97 < 98$, $99 < 100$. Поэтому число n меньше числа m, т. е. $n < m$.

Заметим, что, используя подходы предыдущего урока, можно найти $n = 2500$ и $m = 2550$.

Можно сравнивать и большее количество чисел. Например, рассмотрим числа 21, 17, 28. Легко определить, что наименьшее из этих чисел 17, наибольшее – 28. Этот факт принято записывать в виде ***двойного неравенства***: $17 < 21 < 28$. Двойное неравенство читают начиная со среднего числа: число 21 больше числа 17 и меньше числа 28. Заметим, что для той же тройки чисел двойное неравенство можно записать и с помощью знака >: $28 > 21 > 17$.

Пример 3. Для числа n выполнено неравенство $37 < n < 42$. Сколько таких чисел n существует?

Учитывая натуральный ряд, перечислим все такие числа n: 38, 39, 40, 41. Видно, что таких чисел четыре.

Сравнивая попарно числа, всегда можно ***упорядочить*** любое количество таких чисел, т. е. записать их в порядке возрастания или убывания.

Пример 4. Запишем в порядке возрастания и в порядке убывания числа: 23, 8, 17, 5, 64.

Учитывая натуральный ряд, получим неравенство: $5 < 8 < 17 < 23 < 64$. Такое неравенство позволяет записать числа в порядке возрастания: 5, 8, 17, 23, 64.

Полученное неравенство можно записать и в виде: $64 > 23 > 17 > 8 > 5$. Используя это неравенство, можно записать числа в порядке убывания: 64, 23, 17, 8, 5.

При сравнении реальных характеристик предметов необходимо помнить, что сравнивать можно только однотипные характеристики, записанные с помощью одинаковых единиц измерения.

Понятно, что сравнивать 5 кг 200 г и 3 м 20 см бессмысленно. Одна величина измерена с помощью весов, другая – с помощью линейки (они по природе разные).

Пример 5. Сравним промежутки времени 147 мин и 2 ч 15 мин.

Данные промежутки времени измерены в разных единицах. Поэтому сначала запишем 2 ч 15 мин в минутах. Учтем, что 1 ч = 60 мин, тогда 2 ч 15 мин = $2 \cdot 60 + 15 = 135$ мин. Теперь указанные промежутки времени выражены в одинаковых единицах. Поэтому можно сравнивать числовые значения промежутков времени. Очевидно, что $135 < 147$, тогда 135 мин < 147 мин, или 2 ч 15 мин < 147 мин.

IV. Контрольные вопросы

1. Какое из двух натуральных чисел меньше?
2. Как установить, какое из двух чисел больше?
3. Понятия неравенства и двойного неравенства.
4. Какие характеристики предметов можно сравнивать?
5. Как сравнивают однотипные характеристики предметов?

V. Задание на уроке

№ 82 (а–в), 83 (г–е), 84 (а, д), 85 (1), 87 (б), 90 (а, б, г), 91, 93 (а, б).

VI. Творческие задания

1. Выпишите все числа n, которые удовлетворяют неравенству. Определите количество таких чисел:

а) $27 < n < 33$;

б) $321 < n < 325$;

в) $73 < n < 78$;

г) $534 < n < 541$.

2. Напишите все числа n, для которых выполнены оба неравенства:

а) $n < 35$ и $n > 31$;

б) $n < 47$ и $n > 43$;
в) $17 < n < 31$ и $26 < n < 45$;
г) $23 < n < 45$ и $27 < n < 34$.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 82 (г–е), 83 (а–в), 84 (б, е), 85 (2), 87 (в), 90 (в, д, е), 91 (2), 93 (в, г).

2.3. ЧИСЛА И ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ

Уроки 12, 13. Координатная прямая. Точки на прямой

Цель: познакомиться с понятием «координатная прямая».

Планируемые результаты: уметь откладывать числа на координатной прямой.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Из приведенных неравенств выпишите верные:
а) $327 < 259$;
б) $576 > 493$;
в) $763 > 917$;
г) $183 < 204$.

2) Запишите числа 73, 19, 15, 97, 54 в порядке возрастания.

3) Выпишите все числа n, для которых верно неравенство $83 < n < 89$.

4) Сравните 1 ч 20 мин и 120 мин.

Вариант 2

1) Из приведенных неравенств выпишите верные:
а) $573 < 801$;
б) $273 > 324$;
в) $379 > 283$;
г) $673 < 496$.

2) Запишите числа 21, 78, 97, 61, 18 в порядке убывания.

3) Выпишите все числа n, для которых верно неравенство $71 < n < 78$.

4) Сравните 2 ч 15 мин и 215 мин.

III. Работа по теме уроков

Окружающий нас мир представляет единое целое: в нем одновременно происходят самые разнообразные биологические, физические, химические и другие подобные процессы. Разумеется, при описании этих процессов человечество учесть все факторы не в состоянии. Поэтому по накопленным знаниям и методам их получения приходится выделять отдельные науки: математику, физику, химию, биологию. Даже конкретная наука чрезвычайно сложна и подразделяется на отдельные разделы. Например, в математике выделяют арифметику, геометрию, алгебру, тригонометрию и т. д.

Вместе с тем отдельные разделы науки тесно переплетены. В частности, многие результаты в арифметике и алгебре были получены с помощью геометрии и наоборот. Кроме того, любая наука стремится к наглядности, чему в немалой степени способствуют связи между ее отдельными разделами.

Практика показала, что удобно сопоставлять числа и точки на прямой. Начертим горизонтальную прямую, отметим на ней точку O и справа от нее точку E (рис. 43).

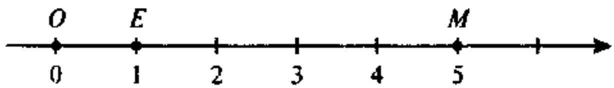


Рис. 43

Примем, что точка O изображает число 0 (начало отсчета), а точка E – число 1. Отрезок OE назовем ***единичным отрезком***.

Отложим вправо от точки E отрезок, равный единичному. Получим точку, которая изображает число 2. Отложив вправо от этой точки еще один единичный отрезок, получим точку, которой соответствует число 3. Аналогично можно построить точки, которые изображают числа 4, 5, 6, ...

Направление от меньших чисел к большим указывают стрелкой.

Прямую с отмеченными точками, которые изображают числа 0, 1, 2, 3, ..., называют ***координатной прямой***, а сами числа – ***координатами*** отмеченных точек. Например, если точка M имеет координату, равную 5 (рис. 43), то это записывают в виде $M(5)$.

На координатной прямой большему числу соответствует точка, расположенная правее, меньшему – расположенная левее.

Изображение чисел точками на координатной прямой стало настолько привычным, что в речи часто число и изображающую его точку не различают. Так, вместо фразы «отметим точку с ординатой 5» говорят «отметим число 5».

Попутно заметим, что на рисунке между точками O и E существует еще бесконечное множество точек, которым, по-видимому, тоже соответствуют какие-то числа, причем не натуральные. И это действительно так: при дальнейшем изучении математики будут рассмотрены и другие числа: отрицательные, дробные, иррациональные и другие.

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие координатной прямой.
2. Что называют единичным отрезком?
3. Координаты точек.
4. Сравнение чисел на координатной прямой.

V. Задание на уроках

№ 101, 102 (а), 104 (б), 105 (а), 106, 107 (а), 108 (1–3), 110 (1), 111.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 102 (б), 103 (а), 105 (б), 107 (б), 108 (4–6), 110 (2), 112 (3).

2.4. ОКРУГЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Уроки 14, 15. Приближенные значения чисел

Цель: научиться округлять натуральные числа.

Планируемые результаты: уметь записывать приближенные значения чисел.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Понятие координатной прямой.

2) Начертите координатную прямую, приняв за единичный отрезок две клетки. Отметьте на ней точки $A(3)$, $B(7)$, $C(10)$.

3) Найдите расстояние между точками $A(1)$ и $B(13)$. Укажите координаты точки, которая находится на одинаковом расстоянии от этих точек. Сделайте рисунок.

4) На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c и d (рис. 44). Сравните числа: а) b и a; б) a, c и d.

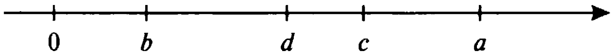


Рис. 44

Вариант 2

1) Понятие единичного отрезка.

2) Начертите координатную прямую, приняв за единичный отрезок две клетки. Отметьте на ней точки $A(2)$, $B(5)$, $C(9)$.

3) Найдите расстояние между точками $A(2)$ и $B(10)$. Укажите координаты точки, которая находится на одинаковом расстоянии от этих точек. Сделайте рисунок.

4) На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c и d (рис. 45). Сравните числа: а) a и c; б) a, b и c.

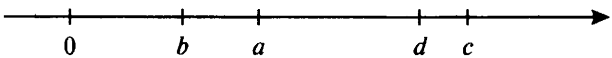


Рис. 45

III. Работа по теме уроков

Понятно, что числа 386 и 387 – различные натуральные числа. При измерении тех или иных величин на практике часто полная точность невозможна и (или) не нужна.

Например, в справочнике приводится высота горы Эльбрус – 5642 м. Но в горах бывают и обвалы и камнепады, поэтому эта высота может измениться буквально за час. Расстояние от Земли до ближайшей планеты Венеры составляет 41 400 000 км. Но и Земля, и Венера сложным образом движутся относительно Солнца и относительно друг друга. Кроме того, измерения таких огромных расстояний выполняются с определенной точностью. Поэтому приведенное расстояние – это некоторая средняя величина.

Следовательно, во многих случаях числа можно и нужно ***округлять***, т. е. заменять близкими числами с нулями на конце. Например, расстояние 41 400 000 км можно заменить круглыми числами 41 000 000 км или 42 000 000 км. При этом более точное приближение первое, так как число 41 000 000 меньше отличатся от точного числа 41 400 000. Понятно, что округляют большие числа. В случае небольших чисел пришлось бы числа 7 и 14 округлять до 10 и считать, что числа равны (хотя они отличаются в 2 раза).

В зависимости от ситуации натуральные числа округляют до того или иного разряда: до десятков, до сотен, до тысяч и т. п.

При округлении числа до десятков его заменяют ***ближайшим*** круглым числом, состоящим из целых десятков: у такого числа в разряде единиц стоит цифра 0.

Пример 1. Округлим до десятков числа: а) 372, б) 375, в) 378.

Отметим эти числа на координатной прямой.

Все три числа находятся между соседними круглыми числами 370 и 380, состоящими из целого числа десятков (рис. 46).

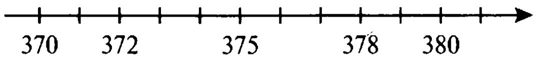


Рис. 46

Число 372 ближе к левому концу промежутка 370 ÷ 380, а число 378 – к правому. Поэтому при округлении до десятков число 372 заменяют числом 370, а число 378 – числом 380. Такое округление записывают следующим образом: 372 ≈ 370 и 378 ≈ 380. Знак ≈ читается как «приближенно равно».

Число 375 находится ровно посередине рассматриваемого промежутка. В целях единообразия существует договоренность: округление выполняют в ***большую*** сторону, т. е. 375 ≈ 380.

Числа 370 и 380 называют ***приближенными значениями*** чисел 372, 375, 378 с ***точностью до десятков***. Число 370 – приближенное значение с недостатком, число 380 – приближенное значение с избытком. Таким образом, число 372 при округлении заменили приближенным значением 370 с недостатком, а каждое из чисел 375 и 378 – приближенным значением 380 с избытком.

Аналогично при округлении числа до сотен его заменяют круглым числом, состоящим из целых сотен: у такого числа цифра 0 должна стоять и в разряде единиц, и в разряде десятков. При округлении числа до тысяч его заменяют круглым числом, состоящим из целых тысяч: у такого числа цифра 0 будет стоять в разрядах единиц, десятков, сотен и т. п.

Округленные результаты часто записывают с помощью сокращений «тыс.», «млн», «млрд».

Пример 2. Округлим расстояние от Земли до Венеры с точностью до млн км. Число 41 400 000 округлим до миллионов и получим: 41 400 000 км ≈ 41 000 000 км = 41 млн км. Таким образом, расстояние между двумя планетами составляет 41 млн км.

До сих пор округление чисел проводилось путем рассуждений. Существует ***правило***, которое позволяет округлять числа формально, не применяя рассуждения.

Для этого:

- к цифре разряда, до которого округляют число, прибавляют 1, если справа от нее стоит цифра 5 или цифра, большая 5. В иных случаях цифру этого разряда не меняют;
- все цифры, расположенные правее разряда, до которого округляют число, заменяют нулями.

Пример 3. Округлим до тысяч число: а) 18 763, б) 23 274.

а) Подчеркнем цифру 8 в разряде тысяч 1$\underline{8}$ 763. Справа от этой цифры стоит цифра 7 (которая больше 5). Поэтому прибавляем к цифре подчеркнутого разряда 1 (получаем число 1$\underline{9}$ 763). Заменяем нулями все цифры, расположенные справа от подчеркнутой. Имеем: 18 763 ≈ 19 000 = 19 тыс.

б) Подчеркнем цифру 3 в разряде тысяч 2$\underline{3}$ 274. Справа от этой цифры стоит цифра 2 (которая меньше 5). Поэтому не меняем цифру подчеркнутого разряда 3. Заменяем нулями все цифры, расположенные справа от подчеркнутой. Получаем: 23 274 ≈ 23 000 = 23 тыс.

IV. Контрольные вопросы

1. Что называют округлением чисел?
2. Округление числа до десятков, до сотен, до тысяч.
3. Приближенные значения числа с недостатком и с избытком.
4. Правило округления натуральных чисел.

V. Задание на уроках

№ 119 (а), 121, 124 (а, б), 125 (б), 128 (а), 133 (в), 134 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 119 (б), 122 (в, г), 123, 124 (в, г), 125 (в), 128 (б), 133 (а), 134 (б).

2.5. РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Уроки 16–18. Простейшие задачи комбинаторики

Цель: получить первые сведения о комбинаторике.

Планируемые результаты: научиться решать простейшие задачи.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Округлите число 23 874 до десятков и до сотен.

2) Масса кита составляет 23 581 кг. Выразите эту величину в тоннах.

3) Некоторое число n округлили до десятков и получили 370. Каким может быть число n?

Вариант 2

1) Округлите число 31 287 до десятков и до сотен.

2) Масса кита составляет 23 316 кг. Выразите эту величину в тоннах.

3) Некоторое число n округлили до десятков и получили 230. Каким может быть число n?

III. Работа по теме уроков

Комбинаторикой называют раздел математики, изучающий вопросы о числе различных комбинаций (удовлетворяющих тем или иным условиям), которые можно составить из данных элементов. При рассмотрении задач комбинаторики чаще всего возникает вопрос: «Сколькими способами ...?» Например, сколькими способами можно составить полноценный обед из четырех первых, трех вторых и двух третьих блюд? Сколькими способами можно организовать экскурсию по пяти музеям в Москве?

Если число таких способов невелико, то можно просто перебрать все возможные варианты и посчитать их число. Для этого нужно предложить алгоритм такого перебора.

План перебора должен быть таким, чтобы не пропустить ни один из вариантов и не повторить ни один из них.

Пример 1. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 2, 3, 8:

а) каждую цифру разрешается использовать только один раз;

б) каждую цифру разрешается использовать не более двух раз?

а) Будем выписывать числа в порядке возрастания. Сначала запишем числа, начинающиеся с цифры 2 (тогда вторая цифра или 3, или 8). Получаем два числа: 23 и 28. Теперь пишем числа, начинающиеся с цифры 3 (тогда вторая цифра или 2, или 8).

Вновь имеем два числа: 32 и 38. Наконец, запишем числа, начинающиеся с цифры 8 (вторая цифра или 2, или 3): 82 и 83. Таким образом, можно составить 6 чисел.

б) Также будем выписывать числа в порядке возрастания, учитывая, что цифры могут и повторяться. Выписываем все числа, начинающиеся с цифры 2. Получаем три числа: 22, 23, 28. Затем напишем числа, начинающиеся с цифры 3: 32, 33, 38. Наконец, выписываем числа, начинающиеся с цифры 8: 82, 83, 88. Таким образом, можно составить 9 чисел.

При переборе вариантов удобно вводить условные обозначения. Например, при флажковой сигнализации на флоте используются флаги разного цвета. Можно цвет флажка обозначать одной буквой: З – зеленый, Ж – желтый, К – красный. Замена предметов их условным обозначением называют ***кодированием.***

Пример 2. Сколько сигналов можно составить, используя три флажка разных цветов: зеленого, желтого и красного? При этом в каждом сигнале цвет флажков не может повторяться.

Чтобы удобнее было записывать варианты сигналов, введем обозначения цветов флажков: З – зеленый, Ж – желтый, К – красный.

Пусть сигнал начинается с зеленого флажка, тогда на втором месте может быть или желтый, или красный флажок (или наоборот). Получаем два сигнала: ЗЖК и ЗКЖ.

Сигнал может начинаться с желтого флажка. Тогда, рассуждая аналогично, также получим два сигнала: ЖЗК и ЖКЗ.

Наконец, начнем сигнал с красного флажка. Опять получим два сигнала: КЗЖ и КЖЗ.

Таким образом, можно составить 6 различных сигналов, используя три флажка разного цвета.

Часто процесс перебора удобно выполнять с помощью специальной схемы – ***дерева возможных вариантов***. Поясним такой подход на примере.

Пример 3. Вернемся к примеру 1б.

Для написания двузначного числа с помощью цифр 2, 3 и 8 надо выбрать его первую и вторую цифры. Сначала выберем первую цифру. Для этого есть три варианта: цифра 2, цифра 3 и цифра 8. Поэтому от начала проведем три ветви (три отрезка) и на их концах поставим цифры 2, 3 и 8 (рис. 47). Теперь будем выбирать вторую цифру. При ее выборе опять возникают те же три варианта. Поэтому от каждой первой цифры проведем по три отрезка, на которых вновь запишем цифры 2, 3 и 8.

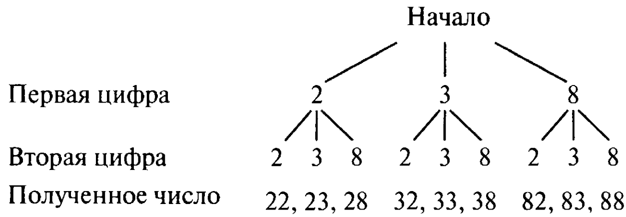


Рис. 47

Двигаясь по ветвям дерева, получим все девять двузначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 3 и 8.

Во многих задачах комбинаторики возникает очень большое число вариантов, и выписать все варианты затруднительно. Поэтому хотелось бы научиться подсчитывать количество таких вариантов. Рассмотрим на примерах подход к решению подобных задач.

Пример 4. В спортивных соревнованиях участвовало 10 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, если каждая команда может получить только одну медаль?

Начнем распределять медали с наименее ценной. Бронзовую медаль может получить одна из 10 команд (10 вариантов). После этого серебряную медаль получит одна из оставшихся 9 команд (9 вариантов). Наконец, золотую медаль получает одна из оставшихся 8 команд (8 вариантов).

Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовые медали, равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Пример 5. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Очевидно, что на первом (соответственно и на последнем) месте может стоять любая цифра (кроме нуля) – 9 вариантов. На втором (соответственно и на предпоследнем) месте может стоять любая цифра – 10 вариантов. На третьем месте (в середине) также может стоять любая цифра – 10 вариантов.

Тогда получаем, что возможно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ вариантов (чисел), т. е. 900 пятизначных чисел одинаково читаются слева направо и справа налево.

Теперь сформулируем ***комбинаторное правило умножения***. Если первый предмет (элемент) можно выбрать n способами, после чего второй предмет выбирается m способами и третий элемент можно выбрать k способами, то число способов, которыми можно выбрать все три предмета, равно произведению $n \cdot m \cdot k$.

Заметим, что в примерах 4 и 5 возникает значительное число вариантов и выписать все такие варианты затруднительно.

IV. Контрольные вопросы

1. Какие вопросы рассматривает комбинаторика?
2. Как можно перебирать и выписывать варианты?
3. Кодирование предметов.
4. Дерево возможных вариантов.
5. Комбинаторное правило умножения.

V. Задание на уроках

№ 137, 139, 142, 144, 145, 149, 151–153, 155 (а), 157 (а, в).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 138, 141, 143, 146–148, 150, 154, 155 (б), 157 (б, г).

Уроки 19, 20. Контрольная работа № 1 по теме «Натуральные числа. Линии»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип уроков: уроки развивающего контроля.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в четырех вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – несколько сложнее). Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (могут быть немного сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает учащимся некоторую возможность выбора. При таких же критериях оценки в случае решения вариантов 3, 4 дается дополнительно один балл (учитывая более высокую сложность вариантов). Поэтому в случае вариантов 3, 4 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или самим учащимся. Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Постройте отрезок AB длиной 8 см. На этом отрезке выбрана точка C так, что $AC = 3BC$. На сколько сантиметров отрезок AC длиннее отрезка BC?

2. На плоскости построена окружность с центром в точке O и радиусом 5 см. Выбрана точка A так, что $OA = 3$ см. Через точку A проведена прямая. В скольких точках эта прямая может пересекать окружность? Сделайте рисунок.

3. Используя по одному разу цифры 0, 3, 8, запишите наименьшее и наибольшее трехзначные числа.

4. Пусть n – любое натуральное число. Каким числом (четным или нечетным) будет число $2n + 5$?

5. Для натурального числа n выполнено неравенство $13 < n < 18$. Какими могут быть числа n?

6. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя только цифры 3 и 8? Выпишите эти числа.

Вариант 2

1. Постройте отрезок AB длиной 10 см. На этом отрезке выбрана точка C так, что $AC = 4BC$. На сколько сантиметров отрезок AC длиннее отрезка BC?

2. На плоскости построена окружность с центром в точке O и радиусом 4 см. Выбрана точка A так, что $OA = 4$ см. Через точку A проведена прямая. В скольких точках эта прямая может пересекать окружность? Сделайте рисунок.

3. Используя по одному разу цифры 0, 2, 7, запишите наименьшее и наибольшее трехзначные числа.

4. Пусть n – любое натуральное число. Каким числом (четным или нечетным) будет число $2n + 8$?

5. Для натурального числа n выполнено неравенство $21 < n < 27$. Какими могут быть числа n?

6. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя только цифры 5 и 7? Выпишите эти числа.

Вариант 3

1. Постройте отрезок AB длиной 12 см. Точка C – середина этого отрезка. На отрезке AC выбрана точка D так, что $AD = 2DC$. На сколько сантиметров отрезок BD длиннее отрезка AD?

2. На плоскости построена окружность с центром в точке A и радиусом 4 см. На этой окружности выбрана точка B. Построена вторая окружность с центром в точке B и радиусом 3 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между точками этих окружностей.

3. Используя по одному разу цифры 0, 1, 2, 5 и 8, запишите наименьшее и наибольшее трехзначные числа.

4. Пусть n – любое четное натуральное число. Каким числом (четным или нечетным) будет число $3n + 7$?

5. Для натурального числа n выполнены неравенства $n > 17$ и $12 < n < 21$. Какими могут быть числа n?

6. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 (цифры могут повторяться)?

Вариант 4

1. Постройте отрезок AB длиной 12 см. Точка C – середина этого отрезка. На отрезке AC выбрана точка D так, что $DC = 2AD$. На сколько сантиметров отрезок BD длиннее отрезка AD?

2. На плоскости построена окружность с центром в точке A и радиусом 5 см. На этой окружности выбрана точка B. Построена вторая окружность с центром в точке B и радиусом 2 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между точками этих окружностей.

3. Используя по одному разу цифры 0, 3, 4, 6 и 9, запишите наименьшее и наибольшее трехзначные числа.

4. Пусть n – любое нечетное натуральное число. Каким числом (четным или нечетным) будет число $5n + 3$?

5. Для натурального числа n выполнены неравенства $n < 29$ и $23 < n < 34$. Какими могут быть числа n?

6. Сколько трехзначных нечетных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 5, 6, 7, 9 (цифры могут повторяться)?

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	3	2	3
2	4	5	2	2
...				
6	2	3	3	5

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Ответы ко всем задачам контрольной работы (можно вывесить на стенде).

V. Ответы к задачам контрольной работы

Вариант 1

1. $AC - BC = 4$ см.
2. Две точки.
3. 308 и 830.
4. Нечетное число.
5. 14, 15, 16, 17.
6. Числа: 333, 338, 383, 388, 833, 838, 883, 888 (всего 8 чисел).

Вариант 2

1. $AC - BC = 6$ см.
2. Одна или две точки.
3. 207 и 720.
4. Четное число.
5. 22, 23, 24, 25, 26.
6. Числа: 555, 557, 575, 577, 755, 757, 775, 777 (всего 8 чисел).

Вариант 3

1. $BD - AD = 4$ см.
2. 11 см.
3. 102 и 852.
4. Нечетное число.
5. 18, 19, 20.
6. $6 \cdot 7 \cdot 3 = 126$ чисел.

Вариант 4

1. $BD - AD = 8$ см.
2. 12 см.
3. 304 и 964.
4. Четное число.
5. 24, 25, 26, 27, 28.
6. $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$ чисел.

VI. Подведение итогов уроков

Глава 3. ДЕЙСТВИЯ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Формируемые УУД: *предметные:* выполнять арифметические действия с натуральными числами, вычислять значения степеней; находить значения числовых выражений, содержащих действия разных ступеней, со скобками и без скобок; выполнять прикидку и оценку результата вычислений, применять приемы проверки правильности вычислений; исследовать простейшие числовые закономерности, используя числовые эксперименты; употреблять буквы для обозначения чисел, для записи общих утверждений; решать текстовые задачи арифметическим способом, используя различные зависимости между величинами (скорость, время, расстояние; работа, производительность, время и т. п.): анализировать и осмысливать текст задачи, переформулировать условие, извлекать необходимую информацию, моделировать условие с помощью схем, рисунков, реальных предметов; строить логическую цепочку рассуждений; критически оценивать полученный ответ, осуществлять самоконтроль, проверяя ответ на соответствие условию; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

3.1. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

Уроки 21, 22. Сумма и разность натуральных чисел

Цель: изучить свойства сложения и вычитания чисел.

Планируемые результаты: уметь использовать свойства арифметических действий при вычислениях.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Помимо записи и счета натуральных чисел человечество с древности выполняло простейшие арифметические действия с числами: сложение и вычитание, умножение и деление, так как осваивались новые земли, менялись погодные условия, в соответствии с чем изменялся, например, и получаемый урожай. Бурно развивались сначала обмен, а потом и торговля, что требовало постоянных расчетов.

Одно из первых арифметических действий – ***сложение*** чисел. Числа, которые складывают, называют ***слагаемыми***, результат сложения – ***суммой***.

Пример 1.

а) $6 + 8 = 14$

слагаемые сумма

б) $6 + 8 + 11 + 3 = 28$

слагаемые сумма

Число 0 в действии сложения обладает особым свойством – для любого числа a справедливы равенства: $a + 0 = a$ и $0 + a = a$.

Операция ***вычитания*** определяется как действие, обратное сложению. Например, вычесть из числа 12 число 7 означает найти такое число a, которое в сумме с числом 7 дает 12, т. е. $7 + a = 12$. Такое число a легко найти: $a = 5$. Таким образом: $12 - 7 = 5$, так как $7 + 5 = 12$.

Числа, которые участвуют в вычитании, носят специальные названия. Число, из которого вычитают, называют ***уменьшаемым***. Число, которое вычитают, называют ***вычитаемым***. Результат вычитания называют ***разностью***.

Пример 2. $12 - 7 = 5$

уменьшаемое вычитаемое разность

Если уменьшаемое обозначить буквой a, вычитаемое – буквой b, то разность записывается в виде $a - b$.

Заметим, что суммой любых двух натуральных чисел будет также натуральное число. Разностью двух натуральных чисел может оказаться и не натуральное число (этот результат и привел к расширению понятия числа и появлению отрицательных чисел).

Пока в 5 классе мы будем вычитать такие натуральные числа, в которых уменьшаемое больше или равно вычитаемому. Тогда разностью таких чисел будет также натуральное число или число 0.

Из свойства нуля при сложении следуют соответствующие свойства вычитания – для любого числа a справедливы равенства: $a - 0 = a$ и $a - a = 0$.

III. Контрольные вопросы

1. Действие сложения. Понятия слагаемых и суммы.
2. Свойства числа в действии сложения.

3. Вычитание. Понятия уменьшаемого, вычитаемого и разности.
4. Какие числа можно вычитать?
5. Свойства вычитания.

IV. Задание на уроках

№ 159 (а–в), 160 (а, в), 163 (в, г), 166, 169, 170.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 159 (г–е), 160 (б, г), 163 (а, б), 167, 168.

Урок 23. Прикидки и оценки при сложении и вычитании

Цель: научиться проводить самоконтроль при вычислениях.

Планируемые результаты: знать простейшие способы контроля вычислений.

Тип урока: урок рефлексии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Действие сложения. Понятия слагаемых и суммы.

2) Найдите сумму и разность чисел 7236 и 5137.

3) Найдите сумму чисел: 327 + 842 + 563.

4) В справочнике приведены длины (в километрах) рек России: Волги – 3531 и Амура – 4453. На сколько километров Амур длиннее Волги?

Вариант 2

1) Действие вычитания. Понятия уменьшаемого, вычитаемого и разности.

2) Найдите сумму и разность чисел 5384 и 3725.

3) Найдите сумму чисел: 591 + 248 + 632.

4) В справочнике приведены длины (в километрах) рек Южной Америки: Ориноко – 2743 и Амазонки – 6437. На сколько километров Амазонка длиннее Ориноко?

III. Работа по теме урока

При решении многих задач нет необходимости выполнять вычисления. Порой вполне достаточно использовать некоторые прикидки и оценки. Это позволяет постоянно и быстро осуществлять самоконтроль при вычислениях. Поясним эту мысль примерами.

Пример 1. Проверим равенство: $2361 + 5142 + 8325 - 7624 = 8207$.

Очевидно, что последняя цифра предполагаемого результата определяется последними цифрами слагаемых и вычитаемого. Найдем ее: $1 + 2 + 5 - 4 = 4$. Таким образом, в предполагаемом результате последней цифрой должна быть 4. В приведенном ответе – последняя цифра 7. Поэтому данное равенство неверное.

Пример 2. Юра в магазине купил книги на сумму 3363 руб., тетради – на сумму 639 руб. и авторучки – на сумму 693 руб. Продавец назвал стоимость покупки – 5005 руб. Убедитесь, что продавец ошибся.

Понятно, что необходимо проверить равенство $3363 + 639 + 693 = 5005$. Проверка по последней цифре результата подтверждает его правдоподобность. Поэтому ужесточим проверку. Легко заметить, что каждое слагаемое в сумме (3363, 639 и 693) без остатка делится на 3. Поэтому и сама сумма должна делиться на 3. Но число 5005 не делится на 3 (это легко проверить, особенно используя соответствующий признак делимости). Таким образом, продавец ошибся, назвав стоимость покупки.

Пример 3. Сравним сумму чисел $A = 783 + 368 + 591$ и число 1800.

Для быстрой оценки суммы A округлим каждое слагаемое до сотен (при этом приближение происходит с избытком): $783 \approx 800$, $368 \approx 400$ и $591 \approx 600$. Тогда сумма $A < 800 + 400 + 600 = 1800$, т. е. $A < 1800$.

Пример 4. Сравним суммы чисел $A = 743 + 523 + 249$ и $B = 218 + 739 + 521$.

Легко сравнить слагаемые, входящие в каждую сумму. Очевидно, что $743 > 739$, $523 > 521$ и $249 > 218$. Поэтому сумма A больше суммы B, т. е. $A > B$.

Из примеров 1–4 видно, что очевидные соображения позволяют решать многие задачи, не выполняя вычислений.

IV. Задание на уроке

№ 171 (а, б), 172 (а, в), 173 (а, б, д), 174, 175 (а), 177 (б), 180 (а).

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 171 (в, г), 172 (б, г), 173 (в, г, е), 175 (б), 177 (а), 180 (б).

Уроки 24, 25. Нахождение неизвестных в равенствах

Цель: получить представление о простейших уравнениях.

Планируемые результаты: уметь находить неизвестные в равенствах.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Не вычисляя, проверьте равенство $1327 + 6832 - 5234 = 2923$.

2) Можно ли число 8326 представить в виде суммы трех чисел, каждое из которых делится на 4? Ответ поясните.

3) Сравните сумму чисел $A = 327 + 635 + 893$ и число 1700, не выполняя сложения.

Вариант 2

1) Не вычисляя, проверьте равенство $5278 + 4321 - 6753 = 2844$.

2) Можно ли число 9362 представить в виде суммы четырех чисел, каждое из которых делится на 3? Ответ поясните.

3) Сравните сумму чисел $A = 738 + 246 + 579$ и число 1400, не выполняя сложения.

III. Работа по теме уроков

Очень часто приходится в данных равенствах находить неизвестные числа, т. е. фактически решать простейшие уравнения.

Пример 1. В равенствах: а) $327 + x = 845$; б) $983 - x = 326$; в) $x - 127 = 456$ надо найти число x, т. е. решить соответствующее уравнение.

При этом полезно помнить основное ***свойство*** равенств, содержащих сложение и вычитание. Любое число, входящее в равенство, можно перенести в другую его часть, обязательно изменив знак перед числом на противоположный («+» на «–» или «–» на «+»). Если перед числом не стоит знак, то надо считать, что стоит знак «+».

Пример 2. Есть верное равенство $326 + 537 = 863$.

а) Перенесем из левой части первое число в правую часть. Получим также верное равенство $537 = 863 - 326$.

б) Теперь перенесем из левой части второе число в правую часть. Вновь получим верное равенство $326 = 863 - 537$.

Пример 3. Имеем верное равенство $976 - 544 = 432$. Перенесем второе число из левой части в правую и получим верное равенство $976 = 432 + 544$.

Это правило (этот алгоритм) используется и при решении простейших уравнений.

Пример 4. Найдем число x из равенства (уравнения) $x + 541 = 927$. Для этого перенесем (с изменением знака) число 541 в правую часть и получим $x = 927 - 541$ или $x = 386$.

Пример 5. Решим уравнение $x - 287 = 475$.

Перенесем число 287 в правую часть равенства, изменив знак этого числа. Получаем $x = 475 + 287$ или $x = 762$.

Часто при решении уравнения приходится переносить числа из одной части равенства в другую несколько раз.

Пример 5. Найдем число x из равенства $758 - x = 374$.

Перенесем число x из левой части в правую и получим верное равенство $758 = 374 + x$. Теперь перенесем число 374 в левую часть. Получаем: $758 - 374 = +x$, или $384 = x$, или $x = 384$. Еще раз напомним, что число $+x$ и число x – это одно и то же число.

IV. Задание на уроках

№ 161, 164 (а, г, д), 165 (а), 179 (а), 180, 183 (а), 184 (б).

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 164 (б, в, е, ж), 165 (б), 179 (б), 181, 183 (б), 184 (а).

3.2. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ

Уроки 26–28. Произведение и частное натуральных чисел

Цель: изучить свойства умножения и деления чисел.

Планируемые результаты: уметь использовать свойства арифметических действий при вычислениях.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Найдите число x из равенства:

а) $758 + x = 924$;

б) $x - 326 = 517$;

в) $617 - x = 368$;

г) $x + 123 = x - 576 + x$.

2) В трех залах библиотеки находится 8716 книг, при этом в первом зале – 2132 книги, во втором – 3517 книг. Сколько книг хранится в третьем зале библиотеки?

Вариант 2

1) Найдите число x из равенства:

а) $327 + x = 856$;

б) $x - 419 = 326$;

в) $725 - x = 249$;

г) $x - 519 = x - 723 + x$.

2) В трех залах библиотеки находится 9613 книг, при этом в первом зале – 3217 книг, во втором – 2624 книги. Сколько книг хранится в третьем зале библиотеки?

III. Работа по теме уроков

Кроме сложения и вычитания к арифметическим действиям относятся еще два действия: умножение и деление.

Числа, которые перемножают, называют ***множителями***. Результат умножения называют ***произведением***.

Пример 1.

а) $3 \cdot 7 = 21$

множители произведение

б) $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

множители произведение

Разумеется, произведением нескольких натуральных множителей также является натуральное число. Если множители обозначить буквами a и b, то их произведение записывают в виде $a \cdot b$.

Напомним свойства умножения, связанные с числами 1 и 0. Для любого числа a справедливы равенства: $a \cdot 1 = a$ и $1 \cdot a = a$, $a \cdot 0 = 0$ и $0 \cdot a = 0$.

Операция деления определяется как действие, обратное умножению. Например, разделить число 24 на число 8 означает найти такое число a, которое при умножении на число 8 дает 24, т. е. $24 : 8 = a$. Такое число a легко найти: $a = 3$. Таким образом: $24 : 8 = 3$, так как $3 \cdot 8 = 24$.

Числа, которые участвуют в делении, носят специальные названия. Число, которое делят, называют ***делимым***. Число, на которое делят, называют ***делителем***. Результат деления называют ***частным***.

Пример 2. $24 : 8 = 3$

делимое делитель частное

Если делимое обозначить буквой a, делитель – буквой b, то частное запишется в виде $a : b$.

Заметим, что частным при делении двух натуральных чисел может оказаться и не натуральное число (этот результат привел к расширению понятия числа и появлению дробных чисел). Например, частным $24 : 8$ является натуральное число 3, а частное $24 : 7$ не является натуральным числом.

Обратите внимание, что никакое число ***нельзя делить на нуль***.

Пример 3. Предположим, что частное $3 : 0$ равно числу a. Тогда по определению операции деления должно выполняться равенство $a \cdot 0 = 3$. Но по свойству умножения $a \cdot 0 = 0$ и равенство $a \cdot 0 = 3$ не выполняется. Поэтому частное $3 : 0$ не существует, или выражение $3 : 0$ ***не имеет смысла***.

Из свойств умножения, связанных с числами 0 и 1, следуют соответствующие свойства деления:

- для любого числа a выполнено равенство $a : 1 = a$;
- для любого числа a, не равного нулю, выполнены равенства $a : a = 1$ и $0 : a = 0$.

IV. Контрольные вопросы

1. Действие умножения. Понятия множителей и произведения.
2. Свойства чисел 0 и 1 в действии умножения.
3. Деление. Понятия делимого, делителя и частного.
4. Всегда ли частное от деления двух натуральных чисел будет натуральным числом?
5. Свойства деления.

V. Задание на уроках

№ 187 (а, в), 188 (б, г), 190 (а, б), 191 (а), 193 (б), 194 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 187 (б, г), 188 (а, в), 190 (в, г), 191 (б), 193 (а), 194 (б).

Уроки 29, 30. Решение простейших уравнений

Цель: научиться решать простые уравнения.

Планируемые результаты: уметь находить неизвестное число в равенстве.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Действие умножения. Понятия множителей и произведения.

2) Выполните действия:

а) $371 \cdot 19$; б) $5440 : 16$.

3) На завод поступило 38 вагонов стали, в каждом вагоне было по 60 т стали. Из этой стали были изготовлены турбины для электростанций. Сколько было изготовлено турбин, если на каждую нужно 43 т стали?

Вариант 2

1) Действие деления. Понятия делимого, делителя и частного.

2) Выполните действия:

а) $283 \cdot 17$; б) $6720 : 38$.

3) На завод поступило 53 вагона стали, в каждом вагоне было по 40 т стали. Из этой стали были изготовлены турбины для электростанций. Сколько было изготовлено турбин, если на каждую нужно 32 т стали?

III. Работа по теме уроков

В ряде случаев из равенств, содержащих действия умножения и деления, необходимо находить неизвестное число (решать уравнение). Для этого полезно свойство: обе части равенства можно умножать или делить на одно и то же не равное нулю число.

Пример 1

а) Обе части верного равенства $81 \cdot 4 = 324$ разделим на одно и то же число 4 и получим верное равенств: $81 \cdot 4 : 4 = 324 : 4$, или $81 = 324 : 4$. Было учтено, что $4 : 4 = 1$.

б) Обе части верного равенства $153 : 3 = 51$ умножим на одно и то же число 3 и опять получим верное равенство $153 : 3 \cdot 3 = 51 \cdot 3$, или $153 = 51 \cdot 3$. При этом в левой части равенства две взаимно обратные операции (деление и умножение на число 3) дают исходное число 153.

Такие же подходы можно использовать и при решении уравнений.

Пример 2

а) Из равенства $31 \cdot x = 124$ найдем число x. Для этого обе части разделим на число 31 и получим: $31 \cdot x : 31 = 124 : 31$, или $x = 4$.

б) Решим уравнение $x : 18 = 7$. Обе части уравнения умножим на число 18. Получаем: $x : 18 \cdot 18 = 7 \cdot 18$, или $x = 126$.

в) Найдем x из равенства $51 : x = 17$. Умножим обе части уравнения на число x. Имеем: $51 : x \cdot x = 17 \cdot x$, или $51 = 17 \cdot x$. Теперь разделим обе части равенства на число 17 и получим: $51 : 17 = 17 \cdot x : 17$, или $3 = x$, или $x = 3$.

IV. Задание на уроке

№ 196, 198 (1, 3), 199 (а, г, д), 212 (а, г).

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 197, 198 (2, 4), 199 (б, в, е, з), 212 (б, е).

Уроки 31, 32. Решение задач на умножение и деление

Цель: научить решать задачи.

Планируемые результаты: уметь использовать умножение и деление для решения задач.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Найдите число x из равенства:

а) $37 \cdot x = 851$; б) $x : 18 = 53$; в) $966 : x = 46$.

2) На завод должны были привезти щебень на 36 железнодорожных платформах грузоподъемностью 63 т. Однако таких платформ не оказалось, и щебень перевозили платформами грузоподъемностью 42 т. Сколько платформ было использовано?

Вариант 2

1) Найдите число x из равенства:

а) $x \cdot 28 = 1036$; б) $x : 19 = 41$; в) $658 : x = 47$.

2) На завод должны были привезти щебень на 48 железнодорожных платформах грузоподъемностью 42 т. Однако таких платформ не оказалось, и щебень перевозили платформами грузоподъемностью 63 т. Сколько платформ было использовано?

III. Работа по теме уроков

Для решения многих задач, в том числе и повседневных, используют действия умножения и деления.

Пример 1. Товарный поезд проезжает 180 км за 6 ч. Пассажирский поезд движется вдвое быстрее. За какое время пассажирский поезд проедет расстояние 660 км?

1. Сначала найдем скорость товарного поезда, разделив пройденное расстояние на затраченное время: $180 : 6 = 30$ (км/ч).

2. Учитывая, что скорость пассажирского поезда вдвое больше, найдем ее: $30 \cdot 2 = 60$ (км/ч).

3. Теперь найдем время, которое затратит пассажирский поезд. Для этого разделим пройденный путь (660 км) на скорость поезда (60 км/ч) и получим: $660 : 60 = 11$ (ч).

Пример 2. Оркестр военных музыкантов готовится к параду, пробуя разные варианты построения. Первый раз оркестр был построен по 38 человек в ряду, второй раз – по 24 человека в ряду. В каждом случае все ряды были полностью заполнены. Какое наименьшее число музыкантов может быть в оркестре?

Предположим, что при построении по 38 человек в ряду получилось x рядов. Тогда в оркестре было $38 \cdot x$ человек.

Пусть при построении по 24 человека было y рядов. В этом случае в оркестре было $24 \cdot y$ музыкантов. Так как количество музыкантов не менялось, то получаем равенство $38 \cdot x = 24 \cdot y$.

Разделим обе части равенства на число 2 и получим $19 \cdot x = 12 \cdot y$. Надо подобрать такие наименьшие натуральные числа x и y, чтобы это равенство выполнялось. Число 19 не делится на число 12. Поэтому возможен только вариант $x = 12$ и $y = 19$.

Тогда в оркестре было $38 \cdot x = 38 \cdot 12 = 456$ человек (или $24 \cdot y = 24 \cdot 19 = 456$), и это наименьшее возможное число музыкантов, удовлетворяющее условию задачи.

Разумеется, если в оркестре будет вдвое (912), втрое (1368) и т. д. больше музыкантов, то условие задачи также выполняется. Но это уже не будет наименьшим числом музыкантов.

IV. Задание на уроках

№ 201 (а), 202 (б), 203 (а), 204 (а, б), 205 (а–в), 206 (1, 2), 207 (б), 210 (а), 218.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 201 (б), 202 (а), 203 (б), 204 (в, г), 205 (г–е), 206 (3, 4), 207 (а), 210 (б), 219.

3.3. ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ В ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Уроки 33–35. Последовательность действий при вычислениях

Цель: рассмотреть порядок решения задачи.

Планируемые результаты: уметь решать задачи с несколькими действиями.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Докажите, что число $A = 8371 \cdot 5861 \cdot 3921 - 1$ делится на 10.

2) Автомобиль проехал со скоростью 75 км/ч расстояние между городами за 6 ч. Обратный путь он проехал со скоростью 50 км/ч. Какое время автомобиль потратил на обратный путь?

3) Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 60?

Вариант 2

1) Докажите, что число $A = 3741 \cdot 8521 \cdot 9631 - 1$ делится на 10.

2) Автомобиль проехал со скоростью 48 км/ч расстояние между городами за 12 ч. Обратный путь он проехал со скоростью 72 км/ч. Какое время автомобиль потратил на обратный путь?

3) Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 80?

III. Работа по теме уроков

При решении многих задач возникают достаточно сложные числовые выражения.

Пример 1. Найдем длину ломаной, которая состоит из трех отрезков длиной по 7 см, пяти отрезков длиной по 4 см и двух отрезков длиной по 6 см.

Сначала составим выражение, которое позволяет вычислить длину l ломаной. Очевидно, что общая длина трех отрезков длиной по 7 см равна $7 \cdot 3$ (см), общая длина пяти отрезков длиной по 4 см равна $4 \cdot 5$ (см) и общая длина двух отрезков длиной по 6 см равна $6 \cdot 2$ (см).

Так как длина ломаной равна сумме длин всех отрезков, ее составляющих, то получаем выражение $l = 7 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 2$. Выполним арифметические действия, входящие в выражение $l = 21 + 20 + 12 = 53$ (см). Итак, длина ломаной составляет 53 см.

Запись, которую можно составить из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок, называют ***числовым выражением***. После выполнения всех указанных в выражении действий получают число, которое называют ***значением выражения***. При нахождении значения числового выражения необходимо соблюдать ***порядок действий***.

Этот порядок определяется как арифметическими действиями, так и скобками, входящими в выражение. Поэтому необходимо четко знать и твердо помнить следующие ***три правила***.

1. Если в выражении нет скобок и оно содержит только действия сложения и вычитания или только действия умножения и деления, то их выполняют слева направо в том порядке, в котором они записаны.

2. Если в выражении нет скобок, то сначала выполняют действия умножения и деления, а затем – действия сложения и вычитания.

3. Если в выражении есть скобки, то сначала выполняют действия в скобках, учитывая первые два правила.

Обычно порядок действий указывают сверху (над действием).

Пример 2. Вычислим:

а) $283 \overset{1}{+} 67 \overset{2}{-} 235 \overset{3}{-} 75 = 350 - 235 - 75 = 115 - 75 = 40$;

б) $28 \overset{1}{:} 7 \overset{2}{\cdot} 9 = 4 \cdot 9 = 36$.

В данном случае в примере а) были только действия сложения и вычитания, в примере б) были только действия деления и умножения. Поэтому мы воспользовались правилом 1.

Пример 3. Найдем значение выражения $28 \cdot 34 - 156 : 3$.

В это выражение входят действия умножения и деления – их выполняют в первую очередь. Также входит и действие вычитания – его выполняют во вторую очередь (правило 2). Получаем:

$28 \overset{1}{\cdot} 34 \overset{3}{-} 156 \overset{2}{:} 3 = 952 - 52 = 900$.

Пример 4. Выполним действия: $28 \cdot (434 - 392) : 14$.

В данное выражение входят скобки. Поэтому в соответствии с правилом 3 в первую очередь выполняют действие в скобках. Получаем:

2 1 3

$28 \cdot (434 - 392) : 14 = 28 \cdot 42 : 14 = 1176 : 14 = 84.$

Обратите внимание на то, что другое расположение скобок фактически приводит к другому выражению, и результат вычислений будет иной. Используя числа и действия, входящие в пример 4, и меняя расположение скобок, составим и вычислим и другие выражения.

Пример 5. Вычислим:

3 2 1

а) $28 \cdot (434 - 392 : 14) = 28 \cdot (434 - 28) = 28 \cdot 406 = 11\,368$;

1 2 3

б) $(28 \cdot 434 - 392) : 14 = (12\,152 - 392) : 14 = 11\,760 : 14 = 840.$

Заметьте, что в примерах 4 и 5 другое расположение скобок привело к изменению порядка действий.

IV. Контрольные вопросы

1. Числовое выражение.
2. Значение числового выражения.
3. Порядок действий в выражениях без скобок.
4. Порядок действий в выражениях со скобками.

V. Задание на уроках

№ 224 (а, б), 225 (1, 2), 226, 228 (а), 229 (а, б), 230 (а, г), 232 (б, в), 234 (а), 236 (б), 237, 240 (а, б), 242.

VI. Творческие задания

1. Используя четыре раза цифру 2, составьте выражение, значение которого равно 1, 2, 3, ..., 9 (например, $2 : 2 + 2 - 2 = 1$; $2 : 2 + 2 : 2 = 2$; $(2 + 2 + 2) : 2 = 3$ и т. д.).

2. Используя четыре раза цифру 7, составьте выражение, значение которого равно 1, 2, 3, ..., 9.

3. Используя четыре раза цифру 5, составьте выражение, значение которого равно 3, 4, 5, 6, 7, 26, 30, 50, 55, 120, 130, 625.

Ответ: $(5 + 5 + 5) : 5 = 3$; $(5 \cdot 5 - 5) : 5 = 4$; $(5 - 5) \cdot 5 + 5 = 5$; $(5 \cdot 5 + 5) : 5 = 6$; $(5 + 5) : 5 + 5 = 7$; $5 \cdot 5 + 5 : 5 = 26$; $(5 : 5 + 5) \cdot 5 = 30$; $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 50$; $(5 + 5) \cdot 5 + 5 = 55$; $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 = 120$; $5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 = 130$; $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

4. С помощью восьми одинаковых цифр (кроме 0), знаков арифметических действий и скобок напишите выражение, значение которого равно 1000.

Ответ: например, $(3333 - 333) : 3$.

5. Между цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 расставьте знаки арифметических действий так, чтобы полученное выражение имело значение 100.

Ответ: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 224 (б, г), 225 (3, 4), 227, 228 (б), 229 (в, г), 230 (а, б), 232 (а, г), 234 (б), 236 (а), 238, 240 (в, г), 243 (а).

3.4. СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

Уроки 36, 37. Возведение числа в степень

Цель: рассмотреть понятие степени числа.

Планируемые результаты: научиться возводить число в степень.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Понятие числового выражения.

2) Найдите значение выражения $(37 \cdot 12 + 90 : 15) : 30$.

3) Рабочие завода должны были выпустить 3600 станков за 30 дней. Но они изготавливали на 30 станков в день больше, чем планировалось. На сколько дней раньше был выполнен заказ?

4) Применяя знаки арифметических действий и скобки, запишите семью семерками число 700.

Ответ: $(7 \cdot 7 \cdot 7 + 7) \cdot (7 + 7) : 7 = 700$.

Вариант 2

1) Значение числового выражения.

2) Найдите значение выражения $(38 \cdot 14 + 120 : 15) : 60$.

3) Рабочие завода должны были выпустить 4800 станков за 40 дней. Но они изготавливали на 30 станков в день больше, чем планировалось. На сколько дней раньше был выполнен заказ?

4) Применяя знаки арифметических действий и скобки, запишите шестью семерками число 700.

Ответ: $(7 \cdot 7 + 7 : 7) \cdot (7 + 7) = 700$.

III. Работа по теме уроков

Принято сумму одинаковых слагаемых записывать короче — в виде произведения. Например: $\underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{5\ \text{слагаемых}} = 3 \cdot 5$.

Аналогичный способ используют и для произведения одинаковых множителей. Например: $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5\ \text{множителей}} = 3^5$.

Выражение 3^5 называют «пятой ***степенью*** числа три» или «три в пятой ***степени***». При этом число 3 – ***основание степени***, число 5 – ***показатель степени***. Таким образом, основание степени – это повторяющийся множитель, показатель степени – число таких повторений в произведении.

Две степени числа в математике носят специальное название. Вторую степень числа называют ***квадратом*** этого числа. Например, запись 5^2 читают так: «пять во второй степени» или «пять в квадрате». При этом $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$.

Третью степень числа называют ***кубом*** этого числа. Например, запись 5^3 читают так: «пять в третьей степени» или «пять в кубе». Получаем: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Заметим, что степени числа могут быть очень большими числами.

Пример 1.

а) $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ и т. д.

б) $2^{10} = 1024$, $3^{10} = 59\,049$, $4^{10} = 1\,048\,576$ и т. д.

Проще всего возводить в степень число 10.

Пример 2. Степени числа 10: $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, ..., $10^n = 1\underbrace{000...0}_{n\ \text{нулей}}$.

Поэтому числами вида 10^n удобно записывать огромные числа, описывающие окружающий мир.

Пример 3.

а) Примерное число звезд во Вселенной 10^{22}.

б) Диаметр Солнечной системы около 10^{13} км.

в) Самая крупная черная дыра имеет массу, равную примерно 10^{10} масс Солнца.

г) Диаметр Вселенной около 10^{24} км.

д) Масса Солнца составляет примерно 10^{30} кг.

Возведение чисел в небольшую степень трудностей не представляет.

Пример 4. Найдем значение выражения:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$;

б) $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$.

Пример 5. Какой цифрой оканчивается значение выражения $714^{13} + 1395^{18} - 6281^{58}$?

Будем находить степени числа 4 и получим: $4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$ и т. д. Таким образом, если число 4 возводят в не-четную степень, то такая степень оканчивается цифрой 4, если в четную – то результат оканчивается цифрой 6. Поэтому число 714^{13} оканчивается цифрой 4. Любые степени чисел 5 и 1 оканчиваются теми же цифрами. Следовательно, значение данного выражения оканчивается цифрой $4 + 5 - 1 = 8$.

Пример 6. Найдем значение выражения

$(3 \cdot 5^3 - 5 \cdot 2^6) : (4 \cdot 3^2 + 2^4 + 3) = (3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) : (4 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3) = (3 \cdot 125 - 5 \cdot 64) : (4 \cdot 9 + 16 + 3) = (375 - 320) : (36 + 16 + 3) = 55 : 55 = 1$.

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие степени числа.
2. Основание и показатель степени числа.
3. Квадрат и куб числа.

V. Задание на уроках

№ 252 (а), 253 (в, ж), 254 (а), 256 (а–в), 261 (б), 267 (г–е), 270 (а, б), 275 (в, г), 276 (а, б), 279 (в, г).

VI. Творческие задания

1. Какой цифрой оканчивается значение выражения:

   а) $3294^6 + 1576^8 + 381^{15}$;

   б) $1286^{17} + 731^{39} + 584^{13}$?

2. Может ли быть точным квадратом число, состоящее из:

   а) двоек и восьмерок;

   б) троек и семерок;

   в) двоек и шестерок;

   г) семерок и пятерок?

(*Указание.* Нет натуральных чисел, квадрат которых оканчивается: в) на 22, 26, 62, 66; г) на 77, 75, 57, 55).

3. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого начинается на:

   а) две единицы;

   б) три единицы.

Ответ: а) $34^2 = 1156$; б) $334^2 = 111\,556$.

4. Найдите наименьшее натуральное число, при умножении которого на 2 получается точный квадрат, а при умножении на 3 – точный куб.

Ответ: $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 252 (б), 253 (г, з), 254 (в), 256 (г–е), 259, 261 (а), 267 (а–в), 270 (в, г), 275 (а, б), 276 (в, г), 279 (а, б).

3.5. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

Уроки 38, 39. Задачи на движение в противоположных направлениях

Цель: рассмотреть движение тел в противоположных направлениях.

Планируемые результаты: уметь решать простейшие задачи.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Основание степени числа.

2) Докажите, что значение выражения $316^{127} - 231^{64}$ делится на 5.

3) Найдите и сравните значения выражений: $A = 2^3 + 4^3 + 6^3$ и $B = (2 + 4 + 6)^3$.

4) Вычислите $3 \cdot 2^5 + 4 \cdot 3^4 - 2 \cdot 5^3$.

Вариант 2

1) Показатель степени числа.

2) Докажите, что значение выражения $654^{328} - 321^{57}$ делится на 5.

3) Найдите и сравните значения выражений: $A = 1^3 + 3^3 + 5^3$ и $B = (1 + 3 + 5)^3$.

4) Вычислите $7 \cdot 2^5 + 5 \cdot 3^4 - 4 \cdot 5^3$.

III. Работа по теме уроков

Задачи на движение тел очень распространены в математике, физике, астрономии, навигации и т. д. Поэтому остановимся на таких задачах подробнее. В них рассматриваются три взаимосвязанные характеристики: скорость движения, время движения и пройденный путь.

До сих пор решались задачи, связанные с движением одного тела. Разумеется, часто в движении участвуют несколько тел. Поэтому необходимо рассмотреть задачи, связанные с движением тел (сначала двух тел). Обсудим типичные ситуации.

Пример 1. Из одного пункта одновременно в противоположных направлениях по прямой выехали две машины. Скорость одной из них 50 км/ч, другой – 30 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 4 ч?

Решим задачу двумя способами.

Первый способ. Пусть машины выезжают из пункта A. Через 4 ч первая машина проедет расстояние $AB = 50 \cdot 4 = 200$ (км), вторая машина – расстояние $AC = 30 \cdot 4 = 120$ (км) (рис. 48). Тогда расстояние между машинами $BC = BA + AC = 200 + 120 = 320$ (км).

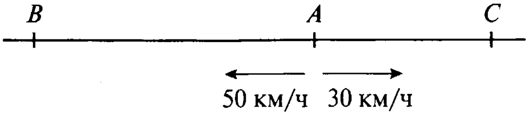


Рис. 48

Второй способ. Найдем расстояние, на которое машины удаляются друг от друга за 1 ч. Очевидно, что расстояние, проходимое телом за единицу времени, численно равно его скорости. (Обратите внимание, что равны именно численно, так как расстояние измеряют в километрах, скорости – в километрах в час).

Тогда за 1 ч первая машина проедет расстояние $AD = 50$ (км), вторая машина – расстояние $AE = 30$ (км). Через 1 ч расстояние между машинами будет равно $DE = DA + AE = 50 + 30 = 80$ (км) (рис. 49). Можно считать, что ***скорость удаления*** машин составляет 80 км/ч. Тогда за 4 ч машины удалятся друг от друга на расстояние $80 \cdot 4 = 320$ (км).

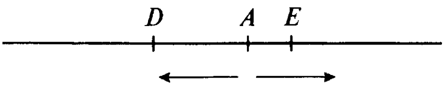


Рис. 49

Разумеется, базовый вариант задачи может быть изменен.

Пример 2. Расстояние между пунктами A и B равно 100 км. Из пункта A по прямой выезжает первая машина со скоростью 50 км/ч. Через 2 ч после этого из пункта B в противоположном направлении тоже по прямой выезжает вторая машина со скоростью 30 км/ч (рис. 50). Какое расстояние будет между машинами через 4 ч после выезда второй машины?

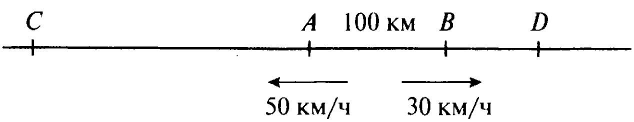


Рис. 50

Конечно, и эту задачу можно решить разными способами. Решим ее одним способом.

Возможны два варианта движения машин. Пусть каждая из машин удаляется и от пункта A и от пункта B. Первая машина находилась в пути на 2 ч больше, чем вторая, т. е. $4 + 2 = 6$ (ч). За это время она проедет расстояние $AC = 50 \cdot 6 = 300$ (км). За 4 ч вторая машина проедет расстояние $BD = 30 \cdot 4 = 120$ (км). Тогда расстояние между машинами будет равно $CD = CA + AB + BD = 300 + 100 + 120 = 520$ (км).

Возможен и другой вариант движения, когда каждая машина движется в направлении от одного пункта к другому (рис. 51).

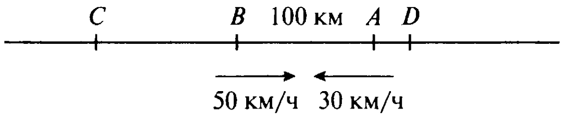


Рис. 51

Очевидно, что по-прежнему расстояния $AC = 300$ (км) и $BD = 120$ (км). Найдем отрезок $AD = BD - AB = 120 - 100 = 20$ (км). Тогда расстояние между машинами будет равно $CD = AC + AD = 300 + 20 = 320$ (км).

Конечно, в задачах очень часто рассматривают встречу тел.

Пример 3. Две машины выезжают одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 480 км. Скорость одной из машин 50 км/ч, другой – 30 км/ч (рис. 52). Через какое время машины встретятся?

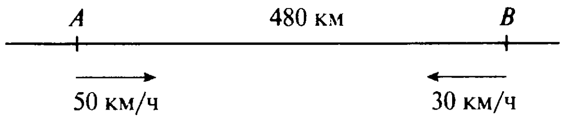


Рис. 52

Найдем ***скорость сближения*** машин. Она равна $50 + 30 = 80$ (км/ч). Так как расстояние между пунктами A и B равно 480 км, а машины за 1 ч сближаются на 80 км, то встреча произойдет через время $480 : 80 = 6$ (ч).

IV. Задание на уроках

№ 285 (а), 286 (б), 287, 289 (а), 290 (б), 299, 301 (а), 303 (б).

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 285 (б), 286 (а), 288, 289 (б), 290 (а), 300, 301 (б), 303 (а).

Уроки 40, 41. Задачи на движение в одном направлении

Цель: рассмотреть движение тел в одном направлении.

Планируемые результаты: уметь решать простейшие задачи.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Из одного пункта в противоположных направлениях одновременно выезжают две машины. Скорость одной из них 30 км/ч, другой – 40 км/ч. Найдите расстояние между ними через 6 ч.

2) Расстояние между двумя пунктами 540 км. Одновременно из них навстречу друг другу выезжают два поезда со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Найдите расстояние между ними через 2 ч. Через какое время поезда встретятся?

Вариант 2

1) Из одного пункта в противоположных направлениях одновременно выезжают две машины. Скорость одной из них 35 км/ч, другой – 45 км/ч. Найдите расстояние между ними через 7 ч.

2) Расстояние между двумя пунктами 490 км. Одновременно из них навстречу друг другу выезжают два поезда со скоростями 30 км/ч и 40 км/ч. Найдите расстояние между ними через 3 ч. Через какое время поезда встретятся?

III. Работа по теме уроков

Рассмотрим теперь движение двух тел в одном направлении.

Пример 1. Из одного пункта одновременно в одном направлении по прямой выехали две машины. Скорость одной из них 50 км/ч, другой – 30 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 4 ч?

Решим задачу двумя способами.

Первый способ. Пусть машины выезжают из пункта A (рис. 53) Через 4 ч первая машина проедет расстояние $AB = 50 \cdot 4 = 200$ (км), вторая машина – расстояние $AC = 30 \cdot 4 = 120$ (км). Тогда расстояние между машинами $BC = AB - AC = 200 - 120 = 80$ (км).

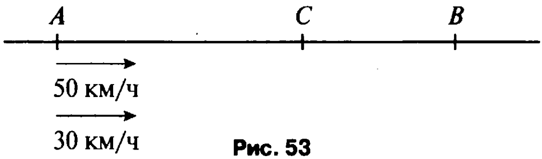


Рис. 53

Второй способ. Найдем расстояние, на которое машины удаляются друг от друга за 1 ч (рис. 54). Очевидно, что расстояние, проходимое телом за единицу времени, численно равно его скорости. Тогда за 1 ч первая машина проедет расстояние $AD = 50$ (км), вторая машина – расстояние $AE = 30$ (км). Через 1 ч расстояние между машинами будет равно $ED = AD - AE = 50 - 30 = 20$ (км). Можно считать, что ***скорость удаления*** машин составляет 20 км/ч. Тогда за 4 ч машины удаляются друг от друга на расстояние, равное $20 \cdot 4 = 80$ (км).

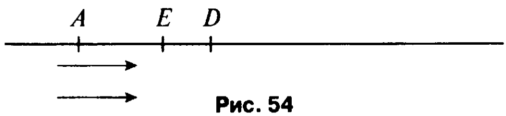


Рис. 54

Теперь рассмотрим встречу тел при движении в одном направлении.

Пример 2. Две машины выезжают одновременно в одном направлении из двух пунктов, расстояние между которыми 140 км. Скорость одной машины 50 км/ч, другой – 30 км/ч (рис. 55). Через какое время более быстрая машина догонит более медленную?

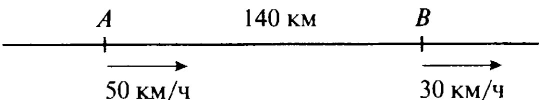


Рис. 55

Найдем ***скорость сближения*** машин. Она равна $50 - 30 =$ $= 20$ (км/ч). Так как расстояние между пунктами A и B равно 140 км, а машины за 1 ч сближаются на 20 км, то встреча произойдет через время, равное $140 : 20 = 7$ (ч).

Пример 3. Из некоторого пункта выезжает машина со скоростью 30 км/ч. Спустя 4 ч из того же пункта в том же направлении выезжает другая машина со скоростью 50 км/ч (рис. 56). Через какое время (после выезда) вторая машина догонит первую?

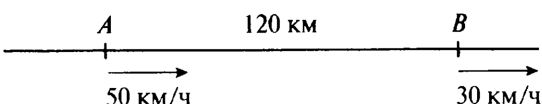


Рис. 56

Через 4 ч первая машина удалится от пункта A и окажется в пункте B, проехав расстояние $AB = 30 \cdot 4 = 120$ (км). Теперь начинает двигаться и вторая машина. Легко сообразить, что задача полностью аналогична предыдущей. Скорость сближения машин составляет $50 - 30 = 20$ (км/ч). Тогда встреча произойдет через время, равное $120 : 20 = 6$ (ч).

IV. Творческие задания

1. Из одного пункта одновременно в одном направлении выехали две машины. Скорость одной из них 60 км/ч, другой – 40 км/ч. Найдите расстояние между машинами через 6 ч.
2. Из одного пункта одновременно в одном направлении выехали две машины. Скорость одной из них 55 км/ч, другой – 45 км/ч. Найдите расстояние между машинами через 4 ч.
3. Из одного пункта с разницей в 3 ч в одном направлении выехали две машины со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Найдите расстояние между машинами через 4 ч после выезда последней из них (рассмотрите все варианты).
4. Из одного пункта с разницей в 5 ч в одном направлении выехали две машины со скоростями 40 км/ч и 30 км/ч. Найдите расстояние между машинами через 3 ч после выезда последней из них (рассмотрите все варианты).
5. Две машины выезжают одновременно в одном направлении из двух пунктов, расстояние между которыми 60 км. Скорость одной машины 55 км/ч, другой – 40 км/ч. Через какое время более быстрая машина догонит более медленную?
6. Две машины выезжают одновременно в одном направлении из двух пунктов, расстояние между которыми 80 км. Скорость одной машины 80 км/ч, другой – 70 км/ч. Через какое время более быстрая машина догонит более медленную?
7. Из некоторого пункта выезжает машина со скоростью 40 км/ч. Спустя 3 ч из того же пункта в том же направлении выезжает другая машина со скоростью 60 км/ч. Через какое время (после выезда) вторая машина догонит первую?
8. Из некоторого пункта выезжает машина со скоростью 50 км/ч. Спустя 4 ч из того же пункта в том же направлении выезжает другая машина со скоростью 70 км/ч. Через какое время (после выезда) вторая машина догонит первую?

V. Подведение итогов уроков

Уроки 42, 43. Задачи на движение по реке

Цель: рассмотреть движение тела по реке.

Планируемые результаты: уметь решать простейшие задачи.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Из одного города с разницей в 4 ч в одном направлении выехали две машины со скоростями 35 км/ч и 45 км/ч. Найдите расстояние между машинами через 3 ч после выезда последней из них (рассмотрите все варианты).

Вариант 2

Из одного города с разницей в 3 ч в одном направлении выехали две машины со скоростями 50 км/ч и 60 км/ч. Найдите расстояние между машинами через 2 ч после выезда последней из них (рассмотрите все варианты).

III. Работа по теме уроков

В задачах часто рассматривается движение тела по реке. При этом основными характеристиками такого движения являются ***собственная скорость*** (скорость в стоячей воде) тела и ***скорость течения*** реки.

При движении тела ***по течению*** реки его скорость равна ***сумме*** собственной скорости тела и скорости течения реки, при движении против течения – ***разности*** собственной скорости и скорости течения реки.

Пример 1. Скорость течения реки равна 3 км/ч, собственная скорость катера равна 15 км/ч. Катер проплыл 54 км по течению и 24 км против течения. Какое время потратил катер на весь путь?

Найдем скорость движения катера по течению реки, равную $15 + 3 = 18$ (км/ч). Тогда 54 км катер проплыл за время, равное $54 : 18 = 3$ (ч). Скорость движения катера против течения равна $15 - 3 = 12$ (км/ч). На 24 км пути было затрачено время, равное $24 : 12 = 2$ (ч). Тогда на весь путь катер потратил время, равное $3 + 2 = 5$ (ч).

Пример 2. Катер проплыл 30 км за 3 ч по озеру и 48 км за 6 ч против течения реки. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

Учтем, что скорость равна частному от деления пройденного пути на время движения. Катер движется по озеру с собственной скоростью, и она равна 30 : 3 = 10 (км/ч). Аналогично найдем скорость движения катера против течения реки 48 : 6 = 8 (км/ч). Очевидно, что скорость течения реки равна разности между собственной скоростью катера и скоростью катера против течения. Тогда получаем 10 – 8 = 2 (км/ч). Итак, собственная скорость катера равна 10 км/ч, скорость течения реки — 2 км/ч.

IV. Контрольные вопросы

1. Основные характеристики при движении тела по реке.
2. Чему равна скорость тела при движении по течению реки?
3. Скорость тела при движении против течения реки.

V. Задание на уроках

№ 291, 293, 295 (а), 296, 298, 306, 307 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 292, 294, 295 (б), 297, 307 (б).

Уроки 44, 45. Контрольная работа № 2 по теме «Действия с натуральными числами»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип уроков: уроки развивающего контроля.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в четырех вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – несколько сложнее). Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (могут быть немного сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает учащимся некоторую возможность выбора. При таких же критериях оценки в случае решения вариантов 3, 4 дается дополнительно один балл (учитывая более высокую сложность вариантов). Поэтому в случае вариантов 3, 4 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или самим учащимся. Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите неизвестное число a, если $87 - a = 21$.
2. Вычислите $258 : 6 - 3 \cdot 8$.
3. Найдите значение выражения $144 : (12 \cdot 11 - 108)$.
4. Вычислите $(21 - 3)^2$.
5. Собственная скорость лодки 8 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч. Какое расстояние проплывет лодка за 5 ч по течению реки и против течения реки?
6. Какой цифрой оканчивается значение выражения $321^7 + 615^8$? Ответ объясните.

Вариант 2

1. Найдите неизвестное число a, если $a - 15 = 53$.
2. Вычислите $378 : 6 - 4 \cdot 7$.
3. Найдите значение выражения $567 - (38 + 25 \cdot 16)$.
4. Вычислите $(24 - 7)^2$.
5. Собственная скорость лодки 9 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Какое расстояние проплывет лодка за 6 ч по течению реки и против течения реки?
6. Какой цифрой оканчивается значение выражения $625^8 - 251^7$? Ответ объясните.

Вариант 3

1. Найдите неизвестное число a, если $83 - 2 \cdot a = 37$.
2. Вычислите $5020 - (895 + 2717) : 28 \cdot 35$.
3. Сравните значения выражений $A = 21^2 - 4^2$ и $B = (21 - 4)^2$.
4. Два автомобиля едут навстречу друг другу. Скорость одного из них 50 км/ч, другого — 70 км/ч. Сейчас между ними расстояние, равное 960 км. Какое расстояние будет между автомобилями через 4 ч? Через какое время они встретятся?
5. Докажите, что значение выражения $341^7 + 245^8 + 4$ делится на 10.
6. В равенстве $(5*)^2 = ***6$ некоторые цифры заменили звездочками. Какие цифры надо поставить вместо звездочек, чтобы получилось верное равенство? Запишите его. Укажите все решения.

Вариант 4

1. Найдите неизвестное число a, если $2 \cdot a - 53 = 79$.

2. Вычислите $6218 - (3092 - 909) : 37 \cdot 104$.

3. Сравните значения выражений $A = 27^2 - 8^2$ и $B = (27 - 8)^2$.

4. Два автомобиля едут навстречу друг другу. Скорость одного из них 60 км/ч, другого — 80 км/ч. Сейчас между ними расстояние, равное 980 км. Какое расстояние будет между автомобилями через 5 ч? Через какое время они встретятся?

5. Докажите, что значение выражения $345^8 + 416^7 - 1$ делится на 10.

6. В равенстве $(8*)^2 = ***9$ некоторые цифры заменили звездочками. Какие цифры надо поставить вместо звездочек, чтобы получилось верное равенство? Запишите его. Укажите все решения.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	3	2	3
2	4	5	2	2
...				
6	2	3	3	5

Обозначения:

+ — число решивших задачу правильно или почти правильно;

± — число решивших задачу со значительными погрешностями;

– — число не решивших задачу;

∅ — число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Ответы ко всем задачам контрольной работы (можно вывесить на стенде).

V. Ответы к задачам контрольной работы

Вариант 1

1. 66.
2. 19.
3. 6.
4. 324.
5. 55 км, 25 км.
6. 6.

Вариант 2

1. 68.
2. 35.
3. 29.
4. 289.
5. 66 км, 42 км.
6. 4.

Вариант 3

1. 23.
2. 505.
3. $A = 425$, $B = 289$, $A > B$.
4. 480 км, 8 ч.
5. Последняя цифра 0.
6. $54^2 = 2916$ и $56^2 = 3136$.

Вариант 4

1. 66.
2. 82.
3. $A = 665$, $B = 361$, $A > B$.
4. 280 км, 7 ч.
5. Последняя цифра 0.
6. $83^2 = 6889$ и $87^2 = 7569$.

VI. Подведение итогов уроков

Глава 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ДЕЙСТВИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Формируемые УУД: *предметные:* записывать свойства арифметических действий с помощью букв; формулировать и применять правила преобразования числовых выражений на основе свойств арифметических действий; анализировать и рассуждать в ходе исследования числовых закономерностей; осуществлять самоконтроль; моделировать условие задачи, используя реальные предметы и рисунки; решать текстовые задачи арифметическим способом; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

4.1. СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Уроки 46, 47. Переместительное и сочетательное свойства

Цель: рассмотреть свойства сложения и умножения.

Планируемые результаты: уметь рационально проводить вычисления.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

В предыдущей главе был рассмотрен порядок действий при вычислениях. Разумеется, этот порядок должен соблюдаться при вычислениях и людьми и вычислительной техникой. При огромном быстродействии и безотказности компьютеров обычно вопрос об оптимизации вычислений не возникает (хотя для некоторых задач, требующих значительного объема вычислений, оптимизация становится необходимой).

Человек, естественно, так быстро считать не может. Кроме того, он при этом может и ошибаться. Поэтому помимо порядка действий при вычислениях очень полезно знать также основные свойства действий. Это позволяет проводить вычисления наиболее рациональным и оптимальным способом.

Для сложения и умножения выполняются два основных свойства: ***переместительное*** и ***сочетательное***.

Переместительное свойство

При перестановке слагаемых (множителей) сумма (произведение) чисел ***не меняется***.

Пример 1. В соответствии с переместительным свойством:

а) $373 + 284 = 284 + 373$;

б) $674 \cdot 283 = 283 \cdot 674$.

С помощью букв переместительное свойство можно записать в виде:

$a + b = b + a$ для сложения;

$a \cdot b = b \cdot a$ для умножения.

Сочетательное свойство

В сумме (произведении) трех чисел можно ***группировать*** или первые два или последние два числа – результат от этого ***не меняется***.

Пример 2. В соответствии с сочетательным свойством:

а) $373 + 284 + 561 = (373 + 284) + 561 = 373 + (284 + 561)$;

б) $674 \cdot 283 \cdot 561 = (674 \cdot 283) \cdot 561 = 674 \cdot (283 \cdot 561)$.

С помощью букв сочетательное свойство можно записать в виде:

$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ для сложения;

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для умножения.

Рассмотренные свойства действий (переместительное и сочетательное) в ряде случаев позволяют существенно упростить вычисления.

Пример 3. Используя свойства, вычислим рациональным образом:

а) $373 + 282 + 627 = 373 + 627 + 282 = (373 + 627) + 282 = 1000 + 282 = 1282$;

б) $4 \cdot 381 \cdot 25 = 4 \cdot 25 \cdot 381 = (4 \cdot 25) \cdot 381 = 100 \cdot 381 = 381 \cdot 100 = 38\,100$.

Переместительное и сочетательное свойства сложения и вычитания позволяют сформулировать общий вывод – ***слагаемые*** в сумме и ***множители*** в произведении можно как угодно ***переставлять и объединять в группы***. Этот вывод позволяет существенно упростить вычисления.

Пример 4. Выполним действия:

а) $148 + 263 + 561 + 52 + 37 = 148 + 52 + 263 + 37 + 561 = (148 + 52) + (263 + 37) + 561 = 200 + 300 + 561 = (200 + 300) + 561 = 500 + 561 = 1061$;

б) $4 \cdot 361 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 125 = 361 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 125 = 361 \cdot (4 \cdot 25) \cdot (8 \times 125) = 361 \cdot 100 \cdot 1000 = (361 \cdot 100) \cdot 1000 = 36\,100 \cdot 1000 = 36\,100\,000$.

Пример 5. Найдем сумму всех четных чисел от 2 до 100, т. е. $a = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 94 + 96 + 98 + 100$.

Очевидно, что в первой сотне чисел пятьдесят четных и пятьдесят нечетных. Таким образом, надо найти сумму пятидесяти четных чисел. В этой сумме сгруппируем первое число и последнее, второе и предпоследнее и т. д. Получаем: $a = (2 + 100) + (4 + 98) + (6 + 96) + (8 + 94) + ... = 102 + 102 + 102 + 102 + ... = 102 \cdot 25 = 2550$. Было учтено, что при попарной группировке слагаемых получилось 25 скобок и сумма чисел в каждой скобке одна и та же и равна 102.

III. Контрольные вопросы

1. Переместительное свойство сложения и умножения.
2. Сочетательное свойство сложения и умножения.

IV. Задание на уроках

№ 312 (а–в), 313 (г–е), 314 (а), 315 (в, г), 316 (а), 317 (б), 318 (а, б), 319 (а), 321 (а, б), 322 (а), 323 (1), 324, 326 (а).

V. Творческие задания

Найдите сумму чисел:

1) $1 + 3 + 5 + ... + 99$;
2) $1 + 2 + 3 + ... + 100$;
3) $4 + 8 + 12 + ... + 100$;
4) $5 + 10 + 15 + ... + 100$;
5) $(a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + ... + (a + 24)$;
6) $(a + 2) + (a + 4) + (a + 6) + ... + (a + 24)$.

Ответы: а) 2500; б) 5050; в) 1300; г) 1050; д) $24 \cdot a + 300$; е) $12 \cdot a + 156$.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 312 (г–е), 313 (а–в), 314 (б), 315 (а, б), 316 (б), 317 (а), 318 (в, г), 319 (б), 321 (в, г), 322 (б), 323 (2), 325, 326 (б).

4.2. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО

Уроки 48, 49. Распределительное свойство сложения (вычитания) и умножения

Цель: рассмотреть распределительное свойство.

Планируемые результаты: уметь рационально выполнять вычисления.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Переместительное свойство сложения.
2) Сочетательное свойство умножения.
3) Вычислите оптимальным образом:
   а) $19 + 24 + 31 + 26$;
   б) $4 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 50$.
4) Известно, что $a + b = 19$. Найдите сумму $a + 11 + 30 + b$.

Вариант 2

1) Сочетательное свойство сложения.
2) Переместительное свойство умножения.
3) Вычислите оптимальным образом:
   а) $23 + 16 + 37 + 44$;
   б) $2 \cdot 31 \cdot 4 \cdot 50 \cdot 25$.
4) Известно, что $a \cdot b = 20$. Найдите произведение $4 \cdot a \cdot b \cdot 5$.

III. Работа по теме уроков

Прямоугольник $ABCD$ состоит из прямоугольников $AEFD$ со сторонами a и c и $EBCF$ со сторонами b и c (рис. 57). Найдем площадь прямоугольника $ABCD$. Это можно сделать двумя способами.

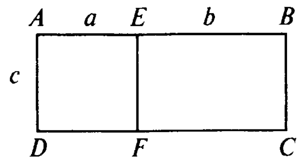


Рис. 57

Можно сразу найти площадь прямоугольника $ABCD$, зная длины двух его смежных сторон $AB = a + b$ и $AD = c$. Эта площадь равна $AB \cdot AD = (a + b) \cdot c$.

Можно также найти площади маленьких прямоугольников $AEFD$ и $EBCF$ и вычислить их сумму. Эти площади соответственно равны $AE \cdot AD = a \cdot c$ и $EB \cdot EF = b \cdot c$. Тогда площадь прямоугольника $ABCD$ равна $a \cdot c + b \cdot c$.

Приравняем эти результаты и получим равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Это равенство выражает ***распределительное*** свойство умножения относительно сложения. Таким образом, чтобы умножить сумму чисел на некоторое число, надо каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить.

Пример 1. Найдем произведение $1008 \cdot 11 = (1000 + 8) \cdot 11 = 1000 \cdot 11 + 8 \cdot 11 = 11\,000 + 88 = 11\,088$.

Распределительное свойство выполняется не только для двух, но и для любого числа слагаемых.

Пример 2. Вычислим $137 \cdot 12 = (100 + 30 + 7) \cdot 12 = 100 \cdot 12 + 30 \cdot 12 + 7 \cdot 12 = 1200 + 360 + 84 = 1644$.

Вычитание, как и умножение, обладает распределительным свойством. Рассмотрим прямоугольник $AEFD$ со сторонами a и c, состоящий из прямоугольников $ABCD$ и $BEFC$ (со сторонами b и c) (рис. 58).

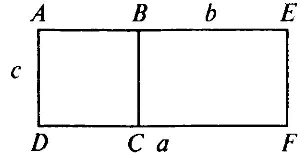


Рис. 58

Очевидно, что в этом прямоугольнике стороны равны $AB = AE - BE = a - b$ и $AD = c$. Тогда площадь прямоугольника $ABCD$ равна $AB \cdot AD = (a - b) \cdot c$.

С другой стороны, площадь этого прямоугольника равна разности площадей прямоугольников $AEFD$ (она равна $AE \cdot AD = a \cdot c$) и $BEFC$ (она равна $BE \cdot BC = b \cdot c$). Поэтому площадь прямоугольника $ABCD = a \cdot c - b \cdot c$. Приравняв два полученных выражения, имеем равенство $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

Пример 3. Вычислим $997 \cdot 13 = (1000 - 3) \cdot 13 = 1000 \cdot 13 - 3 \cdot 13 = 13\,000 - 39 = 12\,961$.

IV. Контрольные вопросы

1. Распределительное свойство умножения относительно сложения.
2. Распределительное свойство умножения и вычитания.

V. Задание на уроках

№ 327 (а), 328 (б), 330 (а, г), 331 (в, г), 335 (1), 340 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 327 (б), 328 (а), 329 (в), 330 (б, д), 331 (а, б), 335 (2), 340 (б).

Урок 50. Вынесение общего множителя за скобки

Цель: рассмотреть вынесение общего множителя за скобки.

Планируемые результаты: уметь использовать вынесение общего множителя при вычислениях.

Тип урока: урок рефлексии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Распределительное свойство умножения относительно сложения.

2) Используя распределительное свойство, вычислите:

а) $103 \cdot 17$;

б) $96 \cdot 13$.

Вариант 2

1) Распределительное свойство умножения относительно вычитания.

2) Используя распределительное свойство, вычислите:
а) $104 \cdot 13$;
б) $97 \cdot 16$.

III. Работа по теме урока

Равенства, отражающие распределительные свойства умножения относительно сложения и вычитания, во многих случаях удобно использовать в обратном порядке, т. е.:

$a \cdot c + b \cdot c = c \cdot (a + b)$;

$a \cdot c - b \cdot c = c \cdot (a - b)$.

В результате этого преобразования сумма (разность) выражений заменяется равным ей произведением. Такое преобразование выражения называют ***вынесением общего множителя с за скобки***.

Пример 1. Найдем значение выражения:

а) $17 \cdot 352 + 17 \cdot 48 = 17 \cdot (352 + 48) = 17 \cdot 400 = 6800$;

б) $19 \cdot 541 - 19 \cdot 241 = 19 \cdot (541 - 241) = 19 \cdot 300 = 5700$.

В ряде случаев выражения могут явно и не содержать общего множителя, однако разложением чисел на множители такой общий множитель может быть получен.

Пример 2. Вычислим $8 \cdot 141 + 38 \cdot 94$.

В выражениях $8 \cdot 141$ и $38 \cdot 94$ нет общих множителей. Однако можно заметить, что $141 = 47 \cdot 3$ и $94 = 47 \cdot 2$. Это позволяет получить общий множитель. Имеем: $8 \cdot 141 + 38 \cdot 94 = 8 \cdot 47 \cdot 3 + 38 \cdot 47 \cdot 2 = (8 \cdot 3) \cdot 47 + (38 \cdot 2) \cdot 47 = 24 \cdot 47 + 76 \cdot 47 = 47 \cdot (24 + 76) = 47 \cdot 100 = 4700$.

Заметим, что разложение на множители можно использовать и в случае более двух выражений.

Пример 3. Найдем значение выражения $53 \cdot 157 + 53 \cdot 69 - 53 \times 26 = 53 \cdot (157 + 69 - 26) = 53 \cdot (226 - 26) = 53 \cdot 200 = 10\,600$.

Пример 4. Известно, что $x + y = 20$. Вычислим значение выражения $7 \cdot x - 4 + y \cdot 7 - 16$.

Используя свойства действий, получим: $7 \cdot x - 4 + y \cdot 7 - 16 = 7 \cdot x + 7 \cdot y - 4 - 16 = 7 \cdot (x + y) - 20 = 7 \cdot 20 - 20 = 7 \cdot 20 - 1 \cdot 20 = (7 - 1) \cdot 20 = 6 \cdot 20 = 120$.

IV. Контрольные вопросы

1. Запишите распределительное свойство в обратном порядке.
2. Вынесение общего множителя за скобки.

V. Задание на уроке

№ 332 (а), 333 (а, б), 334 (а), 337 (а, в), 338 (а, б).

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 332 (б), 333 (в, г), 334 (б), 337 (б, г), 338 (в, г).

4.3. ЗАДАЧИ НА ЧАСТИ

Уроки 51–53. Задачи, связанные с частями

Цель: рассмотреть типичные задачи на части.

Планируемые результаты: уметь решать простейшие задачи на части.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Используя вынесение общего множителя за скобки, вычислите значение выражения:

а) $327 \cdot 46 + 46 \cdot 173$;

б) $763 \cdot 58 - 58 \cdot 263$;

в) $58 \cdot 17 + 13 \cdot 17 - 7 \cdot 71$;

г) $116 \cdot 17 + 21 \cdot 68$.

2) Зная, что $x - y = 17$, найдите значение выражения $6x - 15 - 6y - 7$.

Вариант 2

1) Используя вынесение общего множителя за скобки, вычислите значение выражения:

а) $142 \cdot 52 + 52 \cdot 58$;

б) $651 \cdot 34 - 34 \cdot 151$;

в) $29 \cdot 19 + 46 \cdot 19 - 75 \cdot 9$;

г) $134 \cdot 19 + 22 \cdot 57$.

2) Зная, что $x - y = 23$, найдите значение выражения $5x - 4 - 5y - 11$.

III. Работа по теме уроков

В математике часто приходится решать задачи, в которых рассматриваются сплавы, смеси, банковские вклады и т. д. Такие задачи условно можно назвать задачами на части. Пока ознакомимся с самыми простыми и типичными задачами этой темы. При решении подобных задач полезно использовать простейшие рисунки, схемы, диаграммы.

Пример 1. Сплав содержит 3 части меди и 4 части олова. Сколько килограммов меди и олова надо взять, чтобы получить 210 кг такого сплава?

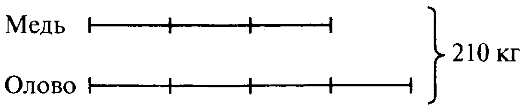


Рис. 59

Так как сплав содержит 3 части меди и 4 части олова, то покажем это схематически на рисунке 59. Видно, что сплав состоит из 7 частей. Найдем вес каждой такой части. Она весит $210 : 7 = 30$ кг.

Медь содержит 3 такие части, которые весят $30 \cdot 3 = 90$ кг. Олово состоит из 4 частей. Их вес составляет $30 \cdot 4 = 120$ кг. Таким образом, для сплава надо взять 90 кг меди и 120 кг олова.

Пример 2. По рецепту для варенья из вишни на 5 частей ягод надо брать 3 части сахара. Сколько сахара надо взять на 15 кг вишни?

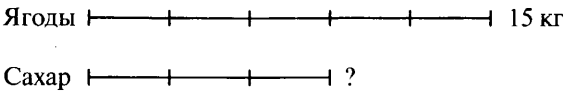


Рис. 60

На рисунке 60 изображено число частей ягод и число частей сахара. Вишня содержит 5 частей, и они весят 15 кг. Тогда одна часть имеет вес $15 : 5 = 3$ кг. Сахар составляет 3 части, и они будут весить $3 \cdot 3 = 9$ кг. Следовательно, надо взять 9 кг сахара.

Пример 3. У Пети в три раза больше марок, чем у Вити. Сколько всего марок у мальчиков, если у Вити на 84 марки меньше, чем у Пети?

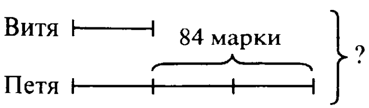


Рис. 61

Введем части. Будем считать, что число марок у Вити составляют одну часть. Тогда число марок у Пети составляют 3 части. Это отображено на рисунке 61. Видно, что разница в количестве марок у Пети и Вити составляет 2 части. Они соответствуют 84 маркам. Тогда 1 часть соответствует $84 : 2 = 42$ маркам.

Общее число марок у мальчиков составляет 4 части, и они соответствуют $42 \cdot 4 = 168$ маркам. Таким образом, у мальчиков 168 марок.

IV. Задание на уроках

№ 342 (а), 343 (б), 344 (а), 345 (б), 346 (а), 347 (б), 348 (в), 349 (а), 351 (б), 352 (а), 355 (б).

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 342 (б), 343 (а), 344 (в), 345 (а), 346 (б), 347 (а), 348 (б), 349 (б), 351 (а), 352 (б), 355 (а).

4.4. ЗАДАЧИ НА УРАВНИВАНИЕ

Уроки 54, 55. Решение задач способом уравнивания

Цель: рассмотреть задачи на уравнивание.

Планируемые результаты: уметь использовать способ уравнивания для решения задач.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Сплав состоит из 5 частей меди, 2 частей олова и 1 части свинца. Вес сплава составляет 480 кг. Сколько килограммов олова в сплаве?

2) Альбом дешевле книги в 4 раза, альбом дороже тетради в 3 раза. Что дешевле: 3 тетради и 2 альбома или одна книга? Ответ объясните.

Вариант 2

1) Сплав состоит из 4 частей меди, 3 частей олова и 1 части свинца. Вес сплава составляет 560 кг. Сколько килограммов меди в сплаве?

2) Альбом дешевле книги в 3 раза, альбом дороже тетради в 2 раза. Что дешевле: 4 тетради и альбом или одна книга? Ответ объясните.

III. Работа по теме уроков

Рассмотрим еще один способ решения задач – способ уравнивания – на примерах.

Пример 1. Длина двух досок равна 230 см, причем длина первой доски на 20 см больше второй (рис. 62). Найдите длину каждой доски.

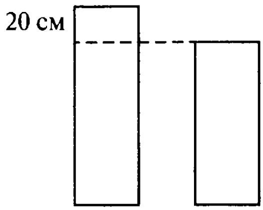


Рис. 62

Уравняем мысленно длины этих досок. Для этого, например, «отрежем» от первой доски 20 см. Тогда длины этих досок станут одинаковыми, и общая длина будет равна 230 – 20 = 210 (см). Длина каждой доски тогда равна 210 : 2 = 105 (см). Чтобы узнать длину первой доски, вернем «отрезанные» 20 см и получим 105 + 20 = 125 (см).

Легко проверить, что условия задачи выполняются: первая доска на 125 – 105 = 20 (см) длиннее второй, общая длина досок равна 125 + 105 = 230 (см).

Заметим, что уравнивание длин досок можно сделать и по-другому. Для этого «нарастим» вторую доску на 20 см (рис. 63). Тогда длины этих досок станут одинаковыми, и их общая длина будет равна 230 + 20 = 250 (см). При этом длина каждой доски равна 250 : 2 = 125 (см). Чтобы узнать длину второй доски, «отрежем» добавленные 20 см и получим 125 – 20 = 105 (см).

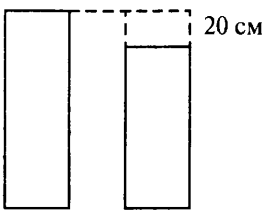


Рис. 63

Пример 2. В трех цехах завода стоят 44 станка. Во втором цехе находится на 5 станков меньше, чем в первом, и на 3 станка больше, чем в третьем (рис. 64). Сколько станков стоит в первом цехе?

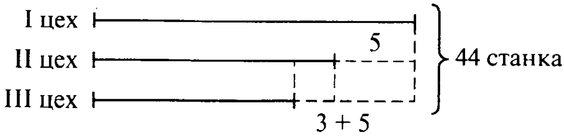


Рис. 64

Нужно уравнять количество станков в цехах. Для этого во II цех «поставим» 5 станков, а в III цех – 5 + 3 = 8 станков. Таким образом, добавили 5 + 8 = 13 станков, и на заводе стало 44 + 13 = = 57 станков. Так как в цехах станков поровну, то в каждом из них будет 57 : 3 = 19 станков.

Итак, в первом цехе – 19 станков, во втором – 19 – 5 = 14 станков и в третьем – 19 – 8 = 11 станков.

IV. Задание на уроках

№ 359 (а), 360 (б), 361 (а), 362 (2а), 363 (б), 364 (а), 365 (б), 366 (а), 367 (б).

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 359 (б), 360 (а), 361 (б), 362 (2б), 363 (а), 364 (б), 365 (а), 366 (б), 367 (а), 368.

Глава 5. УГЛЫ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

Формируемые УУД: *предметные:* измерять с помощью транспортира и сравнивать величины углов; строить углы заданной величины; решать задачи на нахождение градусной меры углов; распознавать многоугольники на чертежах, рисунках, находить их аналоги в окружающем мире; моделировать многоугольники, используя бумагу, проволоку и др.; вычислять периметры многоугольников; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

5.1. КАК ОБОЗНАЧАЮТ И СРАВНИВАЮТ УГЛЫ

Уроки 56, 57. Угол. Сравнение углов

Цель: ознакомиться с понятием угла.

Планируемые результаты: уметь сравнивать углы.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

В повседневной жизни мы постоянно встречаемся с углами и многоугольниками. Например, пересечение рельсов в метрополитене, на железной дороге образует углы. Стены домов, как правило, являются прямоугольниками. Грани египетских пирамид являются треугольниками. Кроме того, в каждом многоугольнике содержатся углы. Поэтому необходимо ознакомиться с понятиями угла и многоугольника.

Фигуру, образованную двумя лучами, выходящими из одной точки, называют ***углом***. На рисунке 65 из точки A проведены лучи AB и AC. При этом точку A называют ***вершиной*** угла, лучи AB и AC – его ***сторонами***.

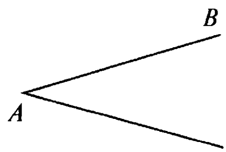


Рис. 65

Угол обозначают или тремя буквами (средняя буква соответствует вершине) $\angle BAC$ (или $\angle CAB$), или одной буквой (по его вершине) $\angle A$.

Углы (как и отрезки) можно сравнивать между собой, например, наложением. На $\angle BAC$ (рис. 66, *а*) наложим $\angle EDF$ (рис. 66, *б*) так, чтобы вершины углов A и D и стороны AB и DE совпали (рис. 66, *в*). Видно, что второй угол ($\angle EDF$) составляет часть первого ($\angle BAC$). Поэтому первый угол больше второго, т. е. $\angle BAC > \angle EDF$. Если при наложении одного угла на другой они совпадают, то такие углы равны.

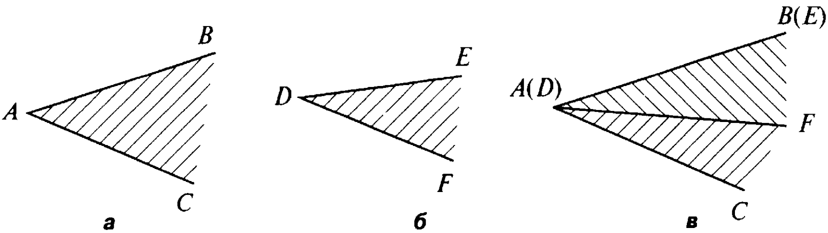


Рис. 66

При дальнейшем изучении геометрии часто будет рассматриваться особый луч – биссектриса угла. ***Биссектрисой*** угла называют луч, который выходит из вершины угла и делит его на два равных угла. На рисунке 67 луч AD – биссектриса $\angle BAC$. При этом $\angle BAD = \angle DAC$.

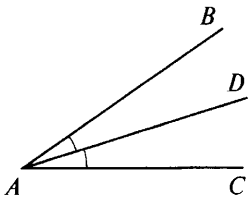


Рис. 67

Биссектрису угла легко найти. Для этого угол, вырезанный из бумаги надо сложить так, чтобы стороны угла совпали. Тогда линия перегиба будет биссектрисой этого угла.

При геометрических построениях используют определенные чертежные инструменты. Так для построения прямых линий применяют линейку, окружности – циркуль. Для построения часто встречающихся углов определенной величины используют ***угольник*** (рис. 68).

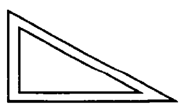


Рис. 68

Так с помощью угольника можно построить особый угол – ***прямой угол***. Под таким углом пересекаются стороны прямоугольника, линии на клетчатой бумаге и т. д.

Начертим два прямых угла с общей вершиной и одной общей стороной. При этом две другие стороны углов составляют прямую линию. Считают, что лучи, составляющие прямую, также образуют угол. Этот угол называют развернутым. Так при построении двух прямых углов *BAC* и *BAD* получают развернутый угол *CAD* (рис. 69).

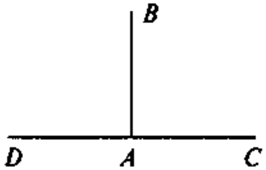


Рис. 69

Можно определить развернутый и прямой углы и по-другому. Построим прямую линию *DC* и произвольную точку *A* на ней. Тогда $\angle CAD$ считают развернутым. Построим биссектрису *AB* этого угла и получим два прямых угла: $\angle BAC$ и $\angle BAD$ (рис. 70).

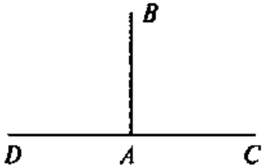


Рис. 70

Очевидно, что развернутый угол равен двум прямым углам. И, наоборот, прямой угол составляет половину развернутого угла.

Принято углы сравнивать с прямым углом. Угол, меньший прямого, называют ***острым*** углом. Угол, больший прямого, называют ***тупым*** углом. На рисунке 71 приведены самые распространенные виды углов.

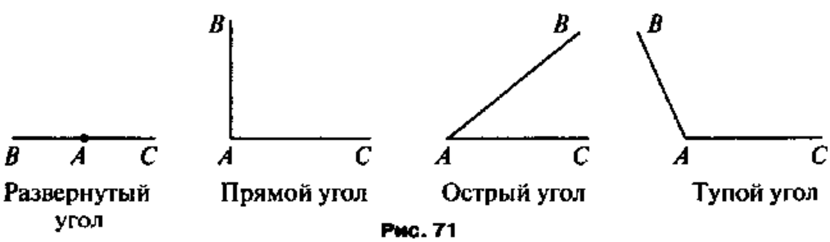


Рис. 71

III. Контрольные вопросы

1. Угол. Вершина и стороны угла.
2. Как сравнивают углы?
3. Биссектриса угла.
4. Прямой и развернутый углы.
5. Острый и тупой углы.

IV. Задание на уроках

№ 372, 373 (а), 374, 376, 378 (1, 2), 379, 381.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 373 (б), 375, 377, 378 (3), 380.

5.2. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Уроки 58, 59. Как измеряют углы

Цель: получить представление об измерении углов.

Планируемые результаты: уметь измерять углы с помощью транспортира.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Угол. Вершина и стороны угла.

2) Острый угол.

3) Сравните углы, на которые поворачивается стрелка часов от цифры 1 до цифры 4 и от цифры 3 до цифры 9.

4) Пусть углы AOB и BOC составляют развернутый угол. При этом угол AOB острый. Каким является угол BOC? Сделайте рисунок.

Вариант 2

1) Биссектриса угла.

2) Тупой угол.

3) Сравните углы, на которые поворачивается стрелка часов от цифры 2 до цифры 8 и от цифры 1 до цифры 4.

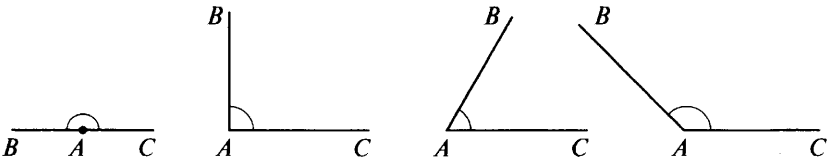
4) Пусть углы AOB и BOC составляют развернутый угол. При этом угол BOC тупой. Каким является угол AOB? Сделайте рисунок.

III. Работа по теме уроков

Разумеется, кроме сравнения углов, хотелось бы научиться их измерять. Для этого прежде всего необходимо иметь меру измерения углов. Такой единицей измерения является угол величиной в 1 ***градус*** (обозначают 1°).

Разделим развернутый угол лучами, выходящими из его вершины, на 180 равных частей. Тогда любой из 180 равных маленьких углов принимают за единицу измерения и считают, что его величина равна 1°. Таким образом, угол, меньший развернутого в 180 раз, имеет величину 1°.

Тогда развернутый угол равен 180°, прямой угол равен 90°. Величина острого угла меньше 90°, а тупого угла – больше 90°. На рисунке 72 приведены некоторые углы.



Развернутый угол $\angle BAC = 180°$ | Прямой угол $\angle BAC = 90°$ | Острый угол $\angle BAC = 60°$ | Тупой угол $\angle BAC = 135°$

Рис. 72

Заметим, что при измерении малых углов (например, в астрономии) используется меньшая мера измерения – одна секунда (обозначают 1′). При этом один градус содержит 60 секунд.

Непонятно, почему считают, что развернутый угол составляет 180° (а не 100° или 10°, что было бы логичнее) и один градус содержит 60 секунд. Существует гипотеза, что такое дробление углов связано с математикой Вавилона, где использовалась шестидесятичная система счисления. Так или иначе, но исторически сложилось именно так (так же как дюймы и футы в Англии).

Заметим, что измерения углов выполняют с помощью ***транспортира***, которым вам предстоит пользовать достаточно часто.

IV. Контрольные вопросы

1. Угол в один градус.
2. Сколько градусов содержит развернутый угол? прямой угол?

V. Задание на уроках

№ 385, 387, 390, 392, 393 (а), 395 (а), 396, 398.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 386, 388, 389, 391, 393 (б), 394, 395 (б), 397, 399.

5.3. ЛОМАНЫЕ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

Уроки 60, 61. Многоугольники

Цель: рассмотреть различные виды многоугольников.

Планируемые результаты: знать виды многоугольников и их основные характеристики.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Внутри угла BAC ($\angle BAC = 72°$) проведен луч AD. Найдите углы BAD и DAC, если $\angle BAD = 3 \cdot \angle DAC$. Сделайте рисунок.

2) Углы BAD и DAC составляют развернутый угол, при этом $\angle BAD = 108°$. Найдите угол между биссектрисами углов BAD и DAC. Сделайте рисунок.

Вариант 2

1) Внутри угла BAC ($\angle BAC = 126°$) проведен луч AD. Найдите углы BAD и DAC, если $\angle DAC = 2 \cdot \angle BAD$. Сделайте рисунок.

2) Углы BAD и DAC составляют развернутый угол, при этом $\angle BAD = 42°$. Найдите угол между биссектрисами углов BAD и DAC. Сделайте рисунок.

III. Работа по теме уроков

Фигуру, ограниченную замкнутой ломаной линией без самопересечений, называют ***многоугольником***. При этом соседние звенья ломаной не лежат на одной прямой.

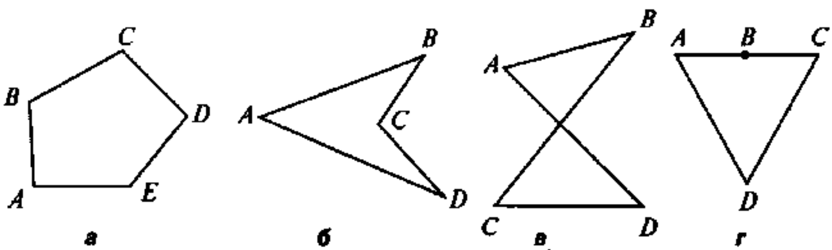


Рис. 73

Рассмотрите многоугольники (рис. 73, *а*, *б*) и фигуры, которые не являются многоугольниками (рис. 73, *в*, *г*). На рисунке 73, *в* звенья AD и BC ломаной пересекаются; на рисунке 73, *г* соседние звенья AB и BC лежат на одной прямой. Заметим, что в многоугольнике не соседние звенья могут и лежать на одной прямой. Например, на рисунке 74 приведен многоугольник, у которого не соседние звенья BC и EF лежат на одной прямой.

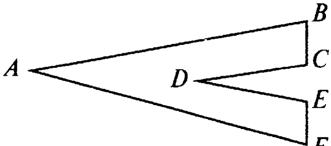


Рис. 74

Звенья ломаной называют ***сторонами*** многоугольника, концы звеньев – ***вершинами*** многоугольника, углы между соседними звеньями – ***углами*** многоугольника. Принято называть многоугольник ***по числу*** его ***углов***: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и т. д. Например, на рисунке 75 приведен четырехугольник с вершинами A, B, C, D, сторонами AB, BC, CD, AD и углами BAD, ABC, BCD, CDA. Заметим, что углы многоугольника могут быть острыми и тупыми (в том числе и больше развернутого угла).

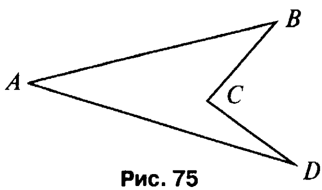


Рис. 75

Очевидно, что многоугольник, имеющий n углов, также имеет и n вершин и n сторон.

Заметим, что многоугольники разделяют на выпуклые и невыпуклые. Рассмотрите выпуклый (рис. 76, *а*) и невыпуклый (76, *б*) четырехугольники.

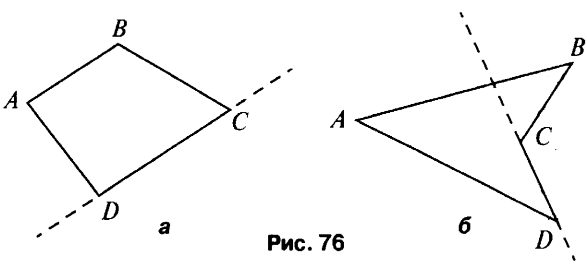


Рис. 76

Для ***выпуклого*** многоугольника вся фигура располагается в одной полуплоскости от прямой, проходящей через его сторону (рис. 76, *а*). В невыпуклом многоугольнике существует такая сторона, что прямая, проходящая через нее, разделяет фигуру на части, расположенные в разных полуплоскостях от прямой (рис. 76, *б*). В геометрии в основном рассматриваются выпуклые многоугольники.

Отрезок, соединяющий две не соседние вершины многоугольника, называют ***диагональю***. На рисунке 77 изображены диагонали AC и AD, проведенные из вершины A пятиугольника $ABCDE$.

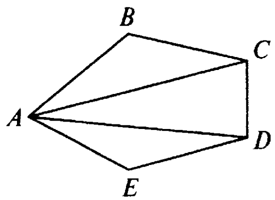
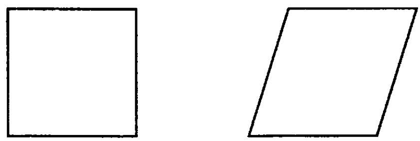


Рис. 77

Заметим, что в треугольнике нет диагоналей. В четырехугольнике можно провести 2 диагонали, в пятиугольнике – 5 диагоналей, в шестиугольнике – 9 диагоналей, в семиугольнике – 14 диагоналей и т. д. (предлагаем построить их самостоятельно).

Многоугольник, у которого все стороны и все углы равны, называют ***правильным***. На рисунке 78, *а* приведен правильный четырехугольник (квадрат); на рисунке 78, *б* – неправильный четырехугольник (ромб). У четырехугольника на рисунке 78, *б* стороны равны, а углы – нет.



а **б**

Рис. 78

Длину ломаной, ограничивающей многоугольник, называют его ***периметром***. Поэтому периметр многоугольника равен сумме длин его сторон.

IV. Контрольные вопросы

1. Многоугольник. Вершины, стороны и углы многоугольника.
2. Диагональ многоугольника.
3. Периметр многоугольника.

V. Задание на уроках

№ 403, 405, 407 (а), 409, 410 (а), 411, 412 (б), 413.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 404, 406, 407 (б), 408, 410 (б), 412 (а), 414, 415.

Уроки 62, 63. Контрольная работа № 3 по теме «Использование свойств действий при вычислениях. Углы и многоугольники»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип уроков: уроки развивающего контроля.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в четырех вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – несколько сложнее). Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (могут быть немного сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает учащимся некоторую возможность выбора. При таких же критериях оценки в случае решения вариантов 3, 4 дается дополнительно один балл (учитывая более высокую сложность вариантов). Поэтому в случае вариантов 3, 4 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или самим учащимся. Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см. Найдите периметр прямоугольника двумя способами.

2. Используя переместительное и сочетательное свойства, найдите значение выражения $38 + 74 + 60 + 62 + 26$.

3. Вынося общий множитель за скобки, вычислите $8 \cdot 37 + 8 \cdot 28 - 8 \cdot 5$.

4. Сплав состоит из 2 частей меди, 5 частей олова и 4 частей цинка. Сколько граммов цинка в 330 г сплава?

5. В двух ящиках 43 детали. В первом из них на 9 деталей больше, чем во втором. Сколько деталей в каждом ящике?

6. Углы AOB и BOC образуют развернутый угол (рис. 79). Найдите эти углы, если $\angle BOC = 3 \cdot \angle AOB$.

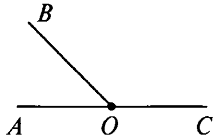


Рис. 79

Вариант 2

1. Стороны прямоугольника равны 7 см и 11 см. Найдите периметр прямоугольника двумя способами.

2. Используя переместительное и сочетательное свойства, найдите значение выражения $61 + 53 + 70 + 47 + 39$.

3. Вынося общий множитель за скобки, вычислите $9 \cdot 31 + 9 \cdot 37 - 9 \cdot 8$.

4. Сплав состоит из 3 частей меди, 4 частей олова и 5 частей цинка. Сколько граммов олова в 480 г сплава?

5. В двух ящиках 57 деталей. В первом из них на 5 деталей меньше, чем во втором. Сколько деталей в каждом ящике?

6. Углы AOB и BOC образуют развернутый угол (рис. 80). Найдите эти углы, если $\angle AOB = 4 \cdot \angle BOC$.

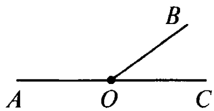


Рис. 80

Вариант 3

1. На параде выстроены три подразделения солдат. Первое подразделение состоит из 14 рядов по 17 солдат в ряду, второе — из 14 рядов по 19 солдат, третье — из 14 рядов по 13 солдат. Сколько солдат участвует в параде? Решите задачу двумя способами.

2. Используя свойства действий, найдите значение выражения $47 \cdot 18 + 19 \cdot 47 - 37 \cdot 17$.

3. Сплав состоит из 2 частей меди, 5 частей олова и 4 частей цинка. Вес сплава 550 г. На сколько граммов в сплаве больше олова, чем меди?

4. В колонну по одному построились 17 учеников. Перед Витей оказалось в 3 раза больше ребят, чем за ним. Каким по счету в колонне стоит Витя?

5. Найдите сумму чисел $12 + 14 + 16 + \ldots + 84 + 86 + 88$.

6. Начертите пятиугольник и проведите все его диагонали. Посчитайте число этих диагоналей.

Вариант 4

1. На параде выстроены три подразделения солдат. Первое подразделение состоит из 18 рядов по 12 солдат в ряду, второе – из 18 рядов по 17 солдат, третье – из 18 рядов по 16 солдат. Сколько солдат участвует в параде? Решите задачу двумя способами.

2. Используя свойства действий, найдите значение выражения $53 \cdot 21 + 26 \cdot 21 - 78 \cdot 11$.

3. Сплав состоит из 3 частей меди, 4 частей олова и 5 частей цинка. Вес сплава 600 г. На сколько граммов в сплаве больше цинка, чем меди?

4. В колонну по одному построились 26 учеников. За Витей оказалось в 4 раза больше ребят, чем перед ним. Каким по счету в колонне стоит Витя?

5. Найдите сумму чисел $11 + 13 + 15 + \ldots + 85 + 87 + 89$.

6. Начертите шестиугольник и проведите все его диагонали. Посчитайте число этих диагоналей.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	3	2	3
2	4	5	2	2
...				
6	2	3	3	5

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Ответы ко всем задачам контрольной работы (можно вывесить на стенде).

V. Ответы к задачам контрольной работы

Вариант 1

1. $6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = (6 + 8) \cdot 2 = 28$ (см).
2. 260.
3. 480.
4. 120 (г).
5. 26 деталей и 17 деталей.
6. $\angle AOB = 45°$, $\angle BOC = 135°$.

Вариант 2

1. $7 \cdot 2 + 11 \cdot 2 = (7 + 11) \cdot 2 = 36$ (см).
2. 270.
3. 540.
4. 160 (г).
5. 26 деталей и 31 деталь.
6. $\angle AOB = 144°$, $\angle BOC = 36°$.

Вариант 3

1. $14 \cdot 17 + 14 \cdot 19 + 14 \cdot 13 = 14 \cdot (17 + 19 + 13) = 686$ (солдат).
2. 1110.
3. 150 (г).
4. Тринадцатый.
5. 1950.
6. 5 диагоналей.

Вариант 4

1. $18 \cdot 12 + 18 \cdot 17 + 18 \cdot 16 = 18 \cdot (12 + 17 + 16) = 810$ (солдат).
2. 780.
3. 100 (г).
4. Шестой.
5. 2000.
6. 9 диагоналей.

VI. Подведение итогов уроков

Глава 6. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Формируемые УУД: *предметные:* формулировать определения делителя и кратного, простого и составного числа, свойства и признаки делимости; использовать таблицу простых чисел; проводить несложные исследования, опираясь на числовые эксперименты; классифицировать натуральные числа (четные и нечетные, по остаткам от деления на 3 и т. п.); доказывать и опровергать с помощью контрпримеров утверждения о делимости чисел; конструировать математические предложения с помощью связок «и», «или», «если..., то...»; решать задачи, связанные с делимостью чисел; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

6.1. ДЕЛИТЕЛИ И КРАТНЫЕ

Уроки 64, 65. Делители числа. Наибольший общий делитель чисел

Цель: получить понятие о делителях числа.

Планируемые результаты: уметь находить делители чисел.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Вопрос о справедливом (равном) разделе добычи, военных трофеев, урожая возникал уже в первобытно-общинных племенах, т. е. чуть ли не при возникновении человечества. В дальнейшем задачи, связанные с делимостью чисел, усложнялись. Постепенно возник раздел математики, изучающий свойства чисел (в частности, делимость чисел). Сейчас этот раздел носит название «Теория чисел».

Свойства чисел изучают уже несколько тысяч лет. Существенный вклад в изучение этих свойств внесли древнегреческие математики Пифагор, Евклид, Диофант, Эратосфен. Тем не менее, несмотря на всю мощь современной математики, некоторые задачи теории чисел до сих пор не решены.

По своему опыту вы знаете, что одно число можно разделить на другое далеко не всегда.

Пример 1

а) Разложим 24 фломастера поровну по 3 коробкам. Так как $24 = 3 \cdot 8$, то 24 делится на 3 и частное равно 8. Поэтому достаточно в каждую коробку положить по 8 фломастеров.

б) Разложить 26 фломастеров поровну по 3 коробкам уже не удается, так как 26 не делится на 3. Очевидно, что $3 \cdot 8 < 26 < 3 \cdot 9$. Поэтому если мы будем раскладывать по 8 фломастеров в коробку, то у нас останется 2 фломастера. Если же раскладывать по 9 фломастеров в коробку, то на последнюю коробку нам не хватит одного фломастера.

Как вы уже знаете, в математике операцию деления определяют с помощью операции умножения: ***число a делится на число b***, если существует такое число c, что выполнено равенство $a = b \cdot c$.

Если число a делится на число b, то для отражения такого факта используют фразы «b – делитель a» или «a – кратное b» (или «a – кратно b»). Так в примере 1а «3 – делитель 24», или «24 – кратное 3».

Очень часто необходимо находить все ***делители*** числа a. Очевидно, что число a всегда имеет делители 1 и a.

Пример 2. Найдем все делители числа 36. Разумеется, делители этого числа 1 и 36. Теперь в качестве делителей будем проверять другие натуральные числа, начиная с числа 2. Найдем еще семь делителей: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18. Всего число 36 имеет девять делителей 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Такой перебор можно сократить, если, отыскав один делитель, записать сразу же и другой, являющийся частным от деления числа 36 на найденный делитель. Эти пары делителей удобно записывать в две строки (друг под другом):

1	2	3	4	6
36	18	12	9	6

(фактически один делитель 6)

Пример 3. У Васи есть 108 орехов. Он хочет их разложить на одинаковые кучки. Сколькими способами он может это сделать?

Очевидно, что 108 орехов Вася может разложить на b одинаковых кучек, если число b является делителем числа 108. Поэтому найдем все делители числа 108 и определим их количество. Используя алгоритм предыдущего примера, выпишем все такие делители:

1	2	3	4	6	9
108	54	36	27	18	12

Видно, что этих делителей 12. Итак, Вася может разложить свои орехи 12 способами: положить их все в одну большую кучку, или в 2 кучки по 54 ореха, или в 3 кучки по 36 орехов и т. д.

Заметим, что в конце этой главы будет приведен еще один алгоритм нахождения всех делителей числа.

В ряде случаев приходится искать общие делители двух и более чисел. Для этого также можно использовать способ перебора.

Пример 4. Найдем общие делители чисел 30 и 105.

Сначала выпишем все делители каждого числа:

делители числа 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30;

делители числа 105: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.

Видно, что числа 30 и 105 имеют четыре общих делителя: 1, 3, 5, 15. Самый большой из этих делителей – число 15, его называют ***наибольшим общим делителем*** чисел 30 и 105 и обозначают сокращенно НОД (30; 105) = 15. Соответственно, наибольший общий делитель чисел a и b обозначают как НОД (a; b).

Пример 5. В группе детского сада перед Новым годом имелось 60 бананов, 30 апельсинов и 105 конфет. Какое наибольшее число одинаковых подарочных наборов можно из них сделать?

Очевидно, что в каждый такой набор должно войти одинаковое количество лакомств. Поэтому это количество должно быть наибольшим общим делителем чисел 60, 30, 105. Делители чисел 30 и 105 выписаны в предыдущем примере. Выпишем все делители числа 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

Видно, что числа 60, 30, 105 имеют общие делители 1, 3, 5, 15. Наибольший из этих делителей – число 15, т. е. НОД (60; 30; 105) = 15. Итак, из имеющихся лакомств максимально можно сделать 15 одинаковых наборов, в каждый из которых войдут 4 банана, 2 апельсина и 7 конфет.

III. Контрольные вопросы

1. Деление числа a на число b.
2. Делители числа и их нахождение.
3. Наибольший общий делитель нескольких чисел.

IV. Задание на уроках

№ 419 (а), 422, 424 (а), 426 (б), 444 (а), 445 (б).

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 419 (б), 423, 424 (б), 426 (а), 444 (б), 445 (а).

Урок 66. Кратные числа

Цель: дать понятие о кратных числах.

Планируемые результаты: уметь находить кратные числа.

Тип урока: урок рефлексии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Нахождение делителей числа.
2) Найдите все делители числа 140.
3) Найдите наибольший общий делитель чисел 60 и 126.

Вариант 2

1) Наибольший общий делитель двух чисел.
2) Найдите все делители числа 175.
3) Найдите наибольший общий делитель чисел 90 и 240.

III. Работа по теме урока

Рассмотрим числа, которые получаются при умножении числа 7 на натуральное число n, т. е. числа вида $7 \cdot n$ (где $n = 1, 2, 3, ...$). Получаем ряд чисел 7, 14, 21, 28, 35, 42, ... Все числа этого ряда ***кратны*** 7. Легко заметить, что разность между двумя соседними числами этого ряда равна 7. Так как ряд натуральных чисел бесконечен, то и полученный ряд чисел 7, 14, 21, ... также бесконечен.

Во многих случаях необходимо находить ***общее кратное*** нескольких чисел, т. е. такое число, которое кратно этим числам (т. е. делится на каждое из них).

Пример 1. Найдем числа, кратные 12 и 15. Выпишем числа, кратные 12 и 15, в две строки:

- числа, кратные 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, ...;
- числа, кратные 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, ...

Видим, что числа 60, 120, 180, ... кратны и 12 и 15, т. е. эти числа – ***общие кратные*** чисел 12 и 15. Разумеется, таких общих кратных бесконечно много. При этом ***наименьшее общее кратное*** равно 60. Такой факт обозначают сокращенно НОК (12; 15) = 60. В общем, для чисел a и b наименьшее общее кратное обозначают символом НОК (a; b). Заметим, что при решении задач в основном используется именно наименьшее общее кратное.

Пример 2. При подготовке к параду роту солдат перестраивают разными способами. Их удалось построить по 10 человек в ряду, по 12 человек в ряду и по 15 человек в ряду. При этом всегда каждый ряд был полностью укомплектован. Какое наименьшее число солдат может быть в роте?

Очевидно, что такое число солдат равно НОК (10; 12; 15). Числа, кратные 12 и кратные 15, были выписаны в предыдущем примере. Запишем числа, кратные 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, ... Теперь легко найти НОК (10; 12; 15) = 60. Легко проверить, что 60 солдат можно построить и по 10, и по 12, и по 15 человек в ряду.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел a и b обладают ***свойством***: **НОД (a; b) · НОК (a; b) = $a \cdot b$.** Проверим его на примере.

Пример 3. Рассмотрим числа $a = 60$ и $b = 90$. Найдем НОД и НОК этих чисел. Для нахождения НОД (60; 90) выпишем делители этих чисел:

- делители числа 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60;
- делители числа 90: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

Видно, что НОД (60; 90) = 30.

Для нахождения НОК (60; 90) запишем числа, кратные 60 и кратные 90:

- числа, кратные 60: 60, 120, 180, 240, ...;
- числа, кратные 90: 90, 180, 270, 360, ...

Получаем: НОК (60; 90) = 180. Проверим приведенное свойство: НОД (60; 90) · НОК (60; 90) = 60 · 90 или 30 · 180 = 60 · 90.

Обратим внимание на то, что такое свойство выполняется только для ***двух*** чисел (например, для трех чисел оно может оказаться и неверным).

Заметим, что позднее будет приведен и другой алгоритм нахождения НОД и НОК нескольких чисел.

IV. Контрольные вопросы

1. Кратные чисел.
2. Общие кратные нескольких чисел.
3. Наименьшее общее кратное чисел.
4. Свойство НОД и НОК двух чисел.

V. Задание на уроке

№ 420, 427, 429, 432, 433 (а, в), 434, 435 (а, г), 438 (а), 440.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 421 (2), 428, 430, 431, 433 (б, г), 435 (б, д), 438 (б), 441, 442.

6.2. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Уроки 67–69. Числа простые и составные

Цель: знать различие между простыми и составными числами.

Планируемые результаты: уметь находить простые числа.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Кратные числа.

2) Миша и Оля измерили шагами одно и то же расстояние, равное 150 м. Шаг Миши равен 70 см, шаг Оли – 55 см. Сколько раз их следы совпали? (Не считая начальную точку.)

3) Для чисел 48 и 27 проверьте свойство НОД и НОК чисел.

Вариант 2

1) Наименьшее общее кратное чисел.

2) Витя и Катя измерили шагами одно и то же расстояние, равное 200 м. Шаг Вити равен 75 см, шаг Кати – 60 см. Сколько раз их следы совпали? (Не считая начальную точку.)

3) Для чисел 40 и 45 проверьте свойство НОД и НОК чисел.

III. Работа по теме уроков

На прошлых занятиях вы находили делители чисел и наверняка обратили внимание на то, что есть число 1 (которое имеет только один делитель), числа 5, 13, 29 (которые имеют два делителя – 1 и само число) и числа 12, 28, 54 (которые имеют более двух делителей).

Именно по этому признаку можно различать числа. Натуральное число называют ***простым***, если оно имеет только два делителя: 1 и самого себя. Выпишем первые простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ... Наименьшее простое число – число 2. Это ***единственное четное*** простое число. Все остальные простые числа являются нечетными.

На примере простых чисел подчеркнем сложность изучаемой темы. Видно, что среди первых десяти натуральных чисел – 4 простых числа, среди вторых десяти чисел также 4, среди третьих десяти чисел – 2 простых числа. Напрашивается естественный вопрос – сколько простых чисел находится в ряду натуральных чисел от 1 до числа *n*. Такие закономерности были установлены русским математиком Леонардом Эйлером и немецким математиком Бернхардом Риманом. Однако обсуждение этого простого вопроса настолько сложно, что возможно только в специализированных математических институтах.

Натуральное число называют ***составным***, если оно имеет более двух делителей. Например, первые составные числа: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ...

Число 1 имеет только один делитель – само число. Поэтому его не относят ни к простым, ни к составным числам.

Часто необходимо находить простые числа. Для этого древнегреческий математик Эратосфен придумал простой способ.

Пример 1. Среди 100 первых чисел найдем все простые числа, пользуясь следующим алгоритмом.

1) Выпишем подряд все натуральные числа от 1 до 100.

2) Зачеркнем число 1 – оно не простое.

3) Первое простое число – число 2; обведем его кружочком. Зачеркнем все числа, кратные 2 (они составные): 4, 6, 8, ...

4) Теперь первое незачеркнутое число – число 3. Оно простое; обведем его кружочком. Зачеркнем все числа, кратные 3 (они составные): 6, 9, 12, ... При этом может оказаться, что такое число уже зачеркнуто.

5) Следующее незачеркнутое число – число 5. Оно простое; обведем его кружочком. Зачеркнем все числа, кратные 5 (они составные): 10, 15, 20, ...

Продолжая подобные действия, получим все простые числа (они обведены кружочками): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Фрагмент таких действий приведен ниже.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

В настоящее время для составления таблиц простых чисел используют компьютеры. Например, в начале 2016 г. было найдено наибольшее известное простое число $2^{74207281} - 1$, которое содержит 22 338 618 цифр. Заметим, что без вычислительной техники такую работу выполнить невозможно. Без компьютеров в 1772 г. Л. Эйлер нашел наибольшее (на то время) простое число

$2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$. Естественно, он использовал более сложный алгоритм, чем Эратосфен.

Разумеется, простых чисел ***бесконечно много*** (что доказал Евклид более двух тысяч лет назад). Поэтому за наибольшим известным простым числом находится еще бесконечно много простых чисел.

Любое число можно представить в виде произведения двух или более чисел. В таких случаях говорят, что число ***разложено на множители***.

Разложение на множители простого числа не представляет интереса: всегда один из множителей равен 1, а другой – самому числу. Любое составное число раскладывается на множители, не содержащие 1, причем часто разными способами.

Пример 2. Разложим на множители число 540. Разумеется, это можно сделать разными способами:

а) $540 = 2 \cdot 270$, $540 = 3 \cdot 180$, $540 = 6 \cdot 90$ и т. д.

б) $540 = 2 \cdot 3 \cdot 90$, $540 = 3 \cdot 4 \cdot 45$, $540 = 4 \cdot 9 \cdot 15$ и т. д.

в) $540 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9$, $540 = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9$ и т. д.

В каждом из этих произведений можно продолжить разложение на множители составных чисел.

Пример 3. Продолжим, например, разложение на множители произведения $3 \cdot 4 \cdot 45 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 15) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 5) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Итак, получили разложение числа 540 на простые множители: $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Любое число либо является простым, либо может быть разложено на ***простые множители***, причем ***единственным*** образом. Таким образом, простые числа – базовые составляющие, из которых с помощью умножения строятся составные числа.

Разложение числа на простые множители позволяет получить о нем много полезной информации.

Пример 4. Из разложения на множители числа $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ следует, что оно делится на простые числа 2, 3 и 5 и не делится на простое число 7. Так как среди делителей числа 540 есть числа 2^2, 3^3 и 5, то оно делится, например, на 4, 12, 15 и т. д. и не делится на 8, 25 и пр.

Теперь обсудим ***алгоритм разложения*** числа на простые множители с помощью следующего примера.

Пример 5. Разложим число 540 на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array}$$

Очевидно, что 540 делится на простое число 2. Разделим и получим число 270. Такое число вновь делится на простое число 2. Опять выполним деление и получим число 135. Это число нечетное и на 2 не делится. Рассмотрим следующее простое число, разделим 135 на 3 и получим 45. Вновь разделим 45 на простое число 3 и получим 15. Опять делим 15 на простое число 3 и получим простое число 5. Таким образом, получили $540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ – разложение на простые множители.

Существуют очень простые алгоритмы нахождения НОД и НОК нескольких чисел. Сначала обсудим на примере нахождение НОД чисел 540 и 3150.

Пример 6. Для нахождения НОД (540; 3150):

1) Разложим каждое из чисел на ***простые множители***: $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ и $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

2) Выпишем простые делители, которые входят в ***оба*** разложения: 2, 3 и 5.

3) Возьмем эти делители в ***наименьшей*** степени, с которой они входят в разложения: 2 – первая степень, 3 – вторая степень, 5 – первая степень, т. е. 2^1, 3^2 и 5^1.

4) Найдем ***произведение*** этих чисел: $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Такое произведение и есть НОД данных чисел, т. е. НОД $(540; 3150) = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$.

Аналогично можно найти и НОК данных чисел.

Пример 7. Для нахождения НОК (540; 3150):

1) Разложим каждое из чисел на ***простые множители***: $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ и $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

2) Выпишем простые делители, которые входят ***хотя бы в одно*** разложение: 2, 3, 5 и 7.

3) Возьмем эти делители в ***наибольшей*** степени, с которой они входят в разложения: 2 – вторая степень, 3 – третья степень, 5 – вторая степень, 7 – первая степень, т. е. 2^2, 3^3, 5^2 и 7^1.

4) Найдем ***произведение*** этих чисел: $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$.

Такое произведение и есть НОК данных чисел, т. е. НОК $(540;\ 150) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 4 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 7 = 18\,900$.

В начале обсуждения этой темы мы говорили о ее сложности. Этим же и закончим. Среди составных чисел выделяют ***совершенные*** числа, которые равны сумме всех своих делителей, отличных от самого числа.

Пример 8. Совершенные числа:

а) Число 6 имеет делители 1, 2 и 3, и их сумма равна 6.

б) Число 28 имеет делители 1, 2, 4, 7 и 14, и их сумма равна 28.

в) Число 496 имеет делители 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 и 248, и их сумма 496.

Совершенные числа изучались еще Евклидом. На февраль 2013 г. известно 48 совершенных чисел: 6, 28, 496, 8128, 33 550 336, ... Видно, что все эти числа четные. До сих пор неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа.

IV. Контрольные вопросы

1. Простые и составные натуральные числа.
2. Расскажите об алгоритме Эратосфена нахождения простых чисел.
3. Разложение числа на множители.
4. Как разложить число на простые множители?
5. Алгоритм нахождения НОД нескольких чисел.
6. Как найти НОК нескольких чисел?
7. Совершенные числа.

V. Задание на уроках

№ 448, 450, 452 (а), 453, 454 (а), 455, 457, 458 (б), 460, 461.

VI. Творческие задания

1. Найдите НОД и НОК чисел:

а) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ и $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$;
б) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ и $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$;
в) $3^2 \cdot 5 \cdot 11$ и $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$;
г) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ и $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$;
д) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ и $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$;
е) $3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $2 \cdot 3 \cdot 5^2$ и $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

2. Разложите числа на простые множители и найдите НОД и НОК этих чисел:

а) 8 и 9;
б) 12 и 35
в) 12 и 18;
г) 24 и 27;
д) 8, 12 и 18;
е) 18, 24 и 27;
ж) 360 и 378;
з) 1386 и 330;
и) 420, 450 и 2209;
к) 550, 1155 и 12 100.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 449 (а, д), 451, 452 (б), 454 (б), 456, 457, 458 (а), 459.

6.3. СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ

Уроки 70, 71. Делимость суммы и произведения

Цель: знать основные свойства делимости чисел.

Планируемые результаты: уметь использовать свойства делимости при решении задач.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Натуральные простые числа.
2) Как найти НОД нескольких чисел?
3) Найдите НОД и НОК чисел:
а) 60 и 90;
б) $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ и $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$;
в) 300 и 2250.

Вариант 2

1) Натуральные составные числа.
2) Как найти НОК нескольких чисел?
3) Найдите НОД и НОК чисел:
а) 84 и 126;
б) $2^2 \cdot 5 \cdot 7$ и $2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$;
в) 540 и 450.

III. Работа по теме уроков

Обсудим основные *свойства делимости* чисел, полезные при выполнении вычислений.

1. Если в произведении один из множителей делится на некоторое число, то и само произведение делится на это число.

Пример 1. Рассмотрим произведение $76 \cdot 27$. Так как число 76 делится на 19, то и данное произведение делится на 19. Число 27 делится на 9, и данное произведение также делится на 9. Очевидно, что это произведение делится и на 171, так как $171 = 19 \cdot 9$.

2. Если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то первое число делится на третье.

Пример 2. Число 360 делится на 90, а число 90 делится на 15. Поэтому число 360 также делится на 15.

3. Если в сумме каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сама сумма делится на это число.

Пример 3. Числа 999, 99 и 9 делятся на 9. Тогда сумма этих чисел также делится на 9. В этом легко убедиться: $999 + 99 + 9 = 9 \cdot 111 + 9 \cdot 11 + 9 \cdot 1 = 9 \cdot (111 + 11 + 1) = 9 \cdot 123$.

4. Если в сумме одно из слагаемых не делится на некоторое число, а остальные делятся, то сумма на это число не делится.

Пример 4. Числа 999 и 99 делятся на 9, а число 19 не делится на 9. Поэтому сумма чисел $999 + 99 + 19 = 1117$ не делится на 9.

IV. Контрольные вопросы

1. Свойства делимости произведения чисел.
2. Свойства делимости суммы чисел.

V. Задание на уроках

№ 467 (а), 468 (б), 469 (а), 470, 471 (а, б), 472, 473 (а), 474 (б), 475 (а, б), 476 (а), 477.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 467 (б), 468 (а), 469 (б), 471 (в, г), 473 (б), 474 (а), 475 (в, г), 478, 479.

6.4. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Урок 72. Делимость чисел на 2, 5 и 10

Цель: знать признаки делимости чисел на 2, 5 и 10.

Планируемые результаты: уметь использовать признаки делимости при решении задач.

Тип урока: урок открытия нового знания.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Свойства делимости произведения чисел.

2) Число 21 672 делится на 42. Выпишите еще несколько делителей числа 21 672.

3) Определите, делится ли сумма $21 + 35 + 77 + 90$ на 7.

4) Подберите три натуральных числа n такие, чтобы число $19 \cdot n$ делилось на 6.

Вариант 2

1) Свойства делимости суммы чисел.

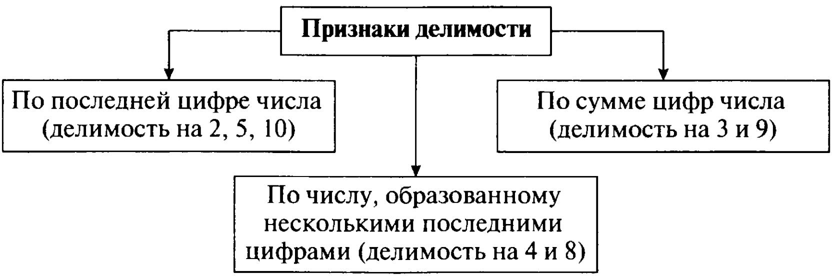
2) Число 20 988 делится на 66. Выпишите еще несколько делителей числа 20 988.

3) Определите, делится ли сумма $36 + 24 + 18 + 53$ на 6.

4) Подберите три натуральных числа n такие, чтобы число $23 \cdot n$ делилось на 7.

III. Работа по теме урока

Чтобы узнать, делится ли одно число на другое (не выполняя деления), используют разные способы. Например, можно разложить делимое и делитель на простые множители. Часто для решения этой задачи используют признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10. В зависимости от формулировки признаков их можно разделить на три группы (см. схему).



Рассмотрим признаки делимости первой группы.

1. Если число оканчивается ***четной цифрой*** (т. е. 0, 2, 4, 6, 8), то оно делится ***на 2***.

Пример 1.

а) Числа 37 83**0** и 85 63**8** делятся на 2.

б) Числа 91 43**1** и 83 76**7** не делятся на 2.

2. Если число оканчивается ***цифрой 0*** или ***цифрой 5***, то оно делится ***на 5***.

Пример 2.

а) Числа 43 98**0** и 71 42**5** делятся на 5.

б) Числа 21 73**4** и 43 63**7** не делятся на 5.

3. Если число оканчивается ***цифрой 0***, то оно делится ***на 10***.

Пример 3.

а) Число 71 83**0** делится на 10.

б) Число 91 62**9** не делится на 10.

Приведенные признаки делимости легко обосновать следующим примером.

Пример 4. Рассмотрим делимость пятизначного числа $32\,61X$ (где X – последняя цифра) на числа 2, 5, 10. Прежде всего представим данное число в виде суммы разрядных слагаемых и преобразуем ее:

$32\,61X = 3 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + X = (3 \cdot 10 \cdot 1000 + 2 \cdot 10 \cdot 100 + 6 \cdot 10 \cdot 10 + 1 \cdot 10) + X = 10 \cdot (3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 1) + X = 10 \cdot 3261 + X.$

Так как число 10 делится на 2, 5 и 10, то и произведение $10 \cdot 3261$ делится на эти числа. Поэтому сумма $10 \cdot 3261 + X$ делится на 2, 5 и 10, если цифра X делится на эти числа. Следовательно, при делении на 2 цифра X должна быть четной, при делении на 5 цифра $X = 0$ или $X = 5$, при делении на 10 цифра $X = 0$.

IV. Контрольные вопросы

1. Признак делимости на 2. Приведите примеры.
2. Признак делимости на 5. Поясните этот признак.
3. Сформулируйте признак делимости на 10. Приведите примеры.

V. Задание на уроке

№ 484 (а), 485 (а, б), 486 (б, в), 496 (а), 500 (б).

VI. Творческие задания

1. Докажите, что:
   а) сумма двух последовательных натуральных чисел является нечетным числом;
   б) произведение двух последовательных натуральных чисел является четным числом;
   в) произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

2. Докажите, что не существует натуральных чисел a и b, для которых выполняется равенство:

а) $2 \cdot a + 8 \cdot b = 1365$;
б) $4 \cdot a + 6 \cdot b = 4237$;
в) $5 \cdot a + 10 \cdot b = 4869$;
г) $5 \cdot a + 15 \cdot b = 7361$;
д) $18 \cdot a + 22 \cdot b = 3167$;
е) $15 \cdot a + 25 \cdot b = 8372$.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 484 (б, в). 485 (в, г). 486 (а), 496 (б). 500 (а).

Урок 73. Делимость чисел на 3 и 9

Цель: знать признаки делимости чисел на 3 и 9.

Планируемые результаты: уметь использовать признаки делимости чисел при решении задач.

Тип урока: урок рефлексии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Какие из чисел 382, 760, 935, 1316, 7460 делятся на 2 и не делятся на 5?

2) Докажите, что не существует натуральных чисел a и b, для которых выполняется равенство $26 \cdot a + 38 \cdot b = 6739$.

3) Используя все цифры от 0 до 4 только по одному разу, запишите наименьшее пятизначное число, делящееся на 5.

Вариант 2

1) Какие из чисел 485, 630, 835, 1375, 1740 делятся на 5 и не делятся на 2?

2) Докажите, что не существует натуральных чисел a и b, для которых выполняется равенство $25 \cdot a + 35 \cdot b = 8746$.

3) Используя все цифры от 0 до 4 только по одному разу, запишите наименьшее пятизначное число, делящееся на 2.

III. Работа по теме урока

Продолжим изучение признаков делимости чисел и рассмотрим признаки делимости второй группы (делимость на 3 и на 9).

1. Если ***сумма цифр*** числа делится на 3, то и само число делится ***на 3***.

Пример 1

а) Сумма цифр числа 67 233 равна $6 + 7 + 2 + 3 + 3 = 21$. Так как эта сумма (число 21) делится на 3, то и само число 67 233 делится на 3.

б) Сумма цифр числа 67 235 равна $6 + 7 + 2 + 3 + 5 = 23$. Так как число 23 не делится на 3, то и само число 67 235 не делится на 3.

Признак делимости на 9 фактически повторяет признак делимости на 3.

2. Если ***сумма цифр*** числа делится на 9, то и само число делится ***на 9***.

Пример 2

а) Сумма цифр числа 91 512 равна $9 + 1 + 5 + 1 + 2 = 18$. Так как эта сумма (число 18) делится на 9, то и само число 91 512 делится на 9.

б) Сумма цифр числа 91 513 равна $9 + 1 + 5 + 1 + 3 = 19$. Так как число 19 не делится на 9, то и само число 91 513 не делится на 9.

Обоснуем рассмотренные признаки делимости.

Пример 3. Рассмотрим делимость пятизначного числа $A = 91\,512$ на 9 (и на 3). Представим данное число в виде суммы разрядных слагаемых: $A = 91\,512 = 9 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2$. В каждом слагаемом выделим наибольшее число, которое делится на 9: $A = 9 \cdot (9999 + 1) + 1 \cdot (999 + 1) + 5 \cdot (99 + 1) + 1 \cdot (9 + 1) + 2 = 9 \cdot 9999 + 9 + 1 \cdot 999 + 1 + 5 \cdot 99 + 5 + 1 \cdot 9 + 1 + 2 = (9 \cdot 9999 + 1 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 1 \cdot 9) + (9 + 1 + 5 + 1 + 2)$.

Очевидно, что каждое слагаемое в первой скобке делится на 9, так как множители 9999, 999, 99 и 9 делятся на 9. Поэтому и сумма чисел в первой скобке делится на 9. Сумма чисел во второй скобке представляет собой сумму цифр данного числа 91 512. Если эта сумма делится на 9 (на 3), то и само число 91 512 делится на 9 (на 3). В нашем случае число 91 512 делится и на 9, и на 3.

Признаки делимости позволяют решать и более сложные задачи.

Пример 4. При каких цифрах X и Y пятизначное число $81X3Y$ делится на 90?

Число 90 представим в виде произведения двух взаимно простых множителей 9 и 10. Заметим, что числа a и b называют ***взаимно простыми***, если НОД $(a; b) = 1$. При этом сами числа a и b могут быть составными. Так числа 9 и 10 составные, но по отношению друг к другу они являются взаимно простыми, так как НОД $(9; 10) = 1$.

Данное число $81X3Y$ делится на 90, если оно одновременно делится и на 9, и на 10. Используя признак делимости на 10, найдем последнюю цифру числа $Y = 0$. Теперь используем признак делимости на 9. Найдем сумму цифр данного числа $8 + 1 + X + 3 + Y = 8 + 1 + X + 3 + 0 = 12 + X$. Очевидно, если цифра $X = 6$, то сумма цифр равна 18 и данное число делится на 9.

Итак, при $X = 6$ и $Y = 0$ число $81X3Y$ делится на 90.

Учтем, что число 6 равно произведению простых множителей 2 и 3. Поэтому признак делимости на 6 ***не нужен***: данное число делится на 6, если оно делится и на 2, и на 3.

Наконец, обсудим признак делимости чисел на 7. В теории чисел существуют методики, которые позволяют получить признак делимости на любое число (например, на 137). Однако такой признак может оказаться настолько громоздким и неудобным, что пользоваться им будет практически невозможно. В подобных случаях проще поделить столбиком одно число на другое и выяснить, можно ли такое деление выполнить без остатка. Такая же ситуация возникает и в случае деления на 7. Признак делимости на 7, разумеется, существует. Однако запоминать его и пользоваться им неудобно. Поэтому проще попытаться разделить данное число на 7.

IV. Контрольные вопросы

1. Признак делимости на 3. Приведите примеры.
2. Делимость числа на 9. Поясните этот признак.
3. Взаимно простые числа.
4. Условия делимости числа на 6.

V. Задание на уроке

№ 487 (а), 488, 489 (а, б), 490 (а), 491, 492 (а–в), 493 (а, б), 494 (в, г), 495 (а, б).

VI. Творческие задания

1. Докажите, что число является составным:

а) 54 321;

б) 45 213;

в) $\underbrace{77...7}_{365\text{ цифр}}1$;

г) $\underbrace{55...5}_{274\text{ цифры}}1$;

д) $\underbrace{21...21}_{570\text{ цифр}}3$;

е) $\underbrace{72...72}_{310\text{ цифр}}3$;

ж) $10^{72}-1$;

з) $10^{29}-1$;

и) $100^{68}-1$;

к) $1000^{37}-1$;

л) $10^{53}-7$;

м) $10^{39}-7$.

(*Указание.* Используйте признаки делимости на 3 и 9).

2. Определите цифру X, если число:

а) $72X31$ делится на 3;

б) $218X2$ делится на 3;

в) $315X42$ делится на 18;

г) $21X635$ делится на 45.

Ответы: а) 2, 5, 8; б) 2, 5, 8; в) 3; г) 1.

3. Определите цифры X и Y, если число:

а) $31X7Y$ делится на 15;

б) $613XY$ делится на 18;

в) $42X5Y$ делится на 45;

г) $72X9Y$ делится на 18.

Ответы: а) $Y=0$, $X=1, 4, 7$; $Y=5$, $X=2, 5, 8$; б) $Y=0$, $X=8$; $Y=2$, $X=6$; $Y=4$, $X=4$; $Y=6$, $X=2$; $Y=8$, $X=0, 9$; в) $Y=0$, $X=7$; $Y=5$, $X=2$; г) $Y=0$, $X=0, 9$; $Y=2$, $X=7$; $Y=4$, $X=5$; $Y=6$, $X=3$; $Y=8$, $X=1$.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 487 (б, в), 489 (в), 490 (б), 492 (г–е), 493 (в, г), 494 (а, б), 495 (в, г).

Урок 74. Делимость чисел на 4 и 8

Цель: знать признаки делимости на 4 и 8.

Планируемые результаты: уметь использовать признаки делимости при решении задач.

Тип урока: урок открытия нового знания.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Признак делимости чисел на 3.

2) Докажите, что число составное: а) 123 456 789; б) $10^{128} - 1$.

3) Найдите последнюю цифру X числа $\underbrace{23...23}_{50\text{ цифр}}X$, если оно делится на 9.

Вариант 2

1) Признак делимости чисел на 9.

2) Докажите, что число составное: а) 987 654 321; б) $10^{137} + 2$.

3) Найдите последнюю цифру X числа $\underbrace{31...31}_{40\text{ цифр}}X$, если оно делится на 3.

III. Работа по теме урока

Наконец рассмотрим признаки делимости на 4 и на 8 (третья группа). Эти признаки связаны с делимостью чисел, образованных несколькими последними цифрами данного числа.

1. Если число, образованное ***двумя*** последними ***цифрами*** данного числа, делится на 4, то и само число делится ***на 4***.

Пример 1

а) Число 57 1**32** делится на 4, так как число 32, образованное двумя последними цифрами, делится на 4. Заметим, что имеется в виду именно число, образованное двумя последними цифрами. При этом цифры 3 и 2 числа 32 на 4 не делятся.

б) Число 57 1**38** не делится на 4, так как число 38, образованное двумя последними цифрами, не делится на 4.

2. Если число, образованное ***тремя*** последними ***цифрами*** данного числа, делится на 8, то и само число делится на 8.

Пример 2

а) Число 57 **104** делится на 8, так как число 104, образованное тремя последними цифрами, делится на 8.

б) Число 57 **108** не делится на 8, так как число 108, образованное тремя последними цифрами, не делится на 8.

Обоснуем, например, признак делимости на 4.

Пример 3. Рассмотрим число $A = 57\,132$ и представим его в виде суммы разрядных слагаемых: $A = 5 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2$. В этой сумме выделим слагаемые, которые всегда делятся на 4: $A = (5 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1000 + 1 \cdot 100) + (3 \cdot 10 + 2)$. Каждое слагаемое в первой скобке делится на 4, так как множители 10 000, 1000 и 100 делятся на 4. Поэтому и вся сумма в первых скобках делится на 4. Следовательно, сумма во вторых скобках также должна делиться на 4. Смысл этой суммы $3 \cdot 10 + 2$ очень простой – двузначное число 32, образованное двумя последними цифрами данного числа $A = 57\,132$.

Аналогично можно обосновать и признак делимости на 8.

Рассмотренные признаки делимости можно использовать и при решении более сложных задач.

Пример 4. Найдем цифру X, если пятизначное число $3X27X$ делится на 4.

Учтем признак делимости на 4 и рассмотрим число $7X$, образованное двумя последними цифрами данного числа. Подбором находим, что при $X = 2$ и $X = 6$ числа 72 и 76, соответственно, делятся на 4. Поэтому при $X = 2$ и $X = 6$ данное число делится на 4.

Пример 5. Найдем цифры X и Y, если пятизначное число $72X9Y$ делится на 72.

Представим число 72 в виде произведения двух взаимно простых чисел 8 и 9. Учтем признаки делимости на 8 (число $X9Y$ делится на 8) и на 9 (сумма цифр $7 + 2 + X + 9 + Y = 18 + X + Y$ делится на 9, т. е. сумма $X + Y$ делится на 9). Далее придется использовать способ подбора.

Сначала найдем, при каких цифрах X и Y число $X9Y$ делится на 8. Для цифры X будем рассматривать весь диапазон цифр от 0 до 9 и подбирать цифру Y. При $X = 0$ число $X9Y$ на самом деле является двузначным и подходит цифра $Y = 6$. Для $X = 1$ подберем цифру $Y = 2$, для $X = 2$ – $Y = 6$, для $X = 3$ – $Y = 2$ и т. д. Можно заметить закономерность: для четных X – цифра $Y = 6$, для нечетных X – цифра $Y = 2$.

Из десяти вариантов набора цифр X и Y, удовлетворяющих признаку делимости на 8, только вариант $X = 7$ и $Y = 2$ подходит по признаку делимости на 9. Итак, при $X = 7$ и $Y = 2$ данное число $72X9Y$ делится на 72.

Заметим, что при решении подобных задач важно разложение делителя на произведение взаимно простых множителей.

Пример 6. Рассмотрим деление некоторого числа на 20. Число 20 можно представить, например, в виде произведения чисел 2 и 10. Казалось бы, что если число делится на 2 и 10, то оно будет делиться и на 20. Но если число делится на 10, то оно делится и на 2. Получается, что признак делимости на 20 совпадает с признаком делимости на 10. Разумеется, это ошибочное утверждение. Например, число 50 делится и на 2, и на 10, но не делится на 20. Такая ошибка связана с разложением числа 20 на произведение чисел, которые не являются взаимно простыми множителями.

Таким образом, при изучении темы были рассмотрены признаки делимости на числа 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10. При этом оказалось, что признак делимости на 6 не нужен, а признак делимости на 7 достаточно сложен, и его знать не надо.

IV. Контрольные вопросы

1. Признак делимости на 4. Приведите примеры.
2. Делимость на 8. Поясните признак примерами.

V. Творческие задания

1. Найдите цифру X, если число делится на 4:

а) $3752X$; г) $912X8$;
б) $7465X$; д) $5X44X$;
в) $631X4$; е) $21XX2$.

Ответы: а) 0, 4, 8; б) 2, 6; в) 0, 2, 4, 6, 8; г) 0, 2, 4, 6, 8; д) 4, 8; е) 1, 3, 5, 7, 9.

2. Найдите цифру X, если число делится на 8:

а) $7312X$; в) $643XX$;
б) $9124X$; г) $57X1X$.

Ответы: а) 0, 8; б) 0, 8; в) 4; г) 6.

3. Определите, на какие из чисел 4, 8, 12, 20 делится число:

а) 55 440; в) 178 932;
б) 145 860; г) 63 240.

Ответы: а) 4, 8, 12, 20; б) 4, 12, 20; в) 4, 12; г) 4, 8, 12, 20.

4. Найдите цифры X и Y, если число:

а) $23X57Y$ делится на 12;
б) $72X1Y$ делится на 36;
в) $127XY$ делится на 20.

Ответы: а) $Y = 2$, $X = 2, 5, 8$; $Y = 6$, $X = 1, 4, 7$; б) $Y = 2$, $X = 6$; $Y = 4$, $X = 4$; в) $Y = 0$, $X = 0, 2, 4, 6, 8$.

VI. Подведение итогов урока

6.5. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Уроки 75–77. Деление чисел с остатком

Цель: рассмотреть общий случай деления двух чисел.

Планируемые результаты: уметь записывать деление числа с остатком.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Признак делимости на 4.
2) Найдите цифру X, если число $73X5X$ делится на 8.
3) Определите цифры X и Y, если число $91X5Y$ делится на 12.

Вариант 2

1) Признак делимости на 8.
2) Найдите цифру X, если число $91X6X$ делится на 4.
3) Определите цифры X и Y, если число $73X8Y$ делится на 12.

III. Работа по теме уроков

По своему опыту вы знаете, что не всегда можно разделить одно число на другое.

Пример 1. Мама принесла 17 конфет и хочет поделить их поровну между тремя детьми. Разделим число 17 на число 3 и получим частное 5 и остаток 2. Тогда каждому ребенку достанется по 5 конфет и 2 конфеты останутся.

$$\begin{array}{r|l} -\,17 & 3 \\ \underline{15} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

Разделить одно число на другое можно только тогда, когда первое число кратно второму. Иначе при делении получается остаток. Теперь нужно понять, как оптимально записывать деление с остатком, чтобы такую запись было удобно использовать при решении задач.

Пример 2. Разделим числа 60 и 163 на число 5.

$$\text{а) }\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\text{делимое}\quad\text{делитель}} \\ 160 & 5 \\ \cline{2-2} -15 & 32 \text{ — частное} \\ \hline 10 & \\ -10 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \text{б) }\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\text{делимое}\quad\text{делитель}} \\ 163 & 5 \\ \cline{2-2} -15 & 32 \text{ — частное} \\ \hline 14 & \\ -10 & \\ \hline 3 & \text{— остаток} \end{array}$$

В случае а) число 160 кратно 5, т. е. оно делится на 5 без остатка. Поэтому его можно представить в виде произведения делителя и частного: $160 = 5 \cdot 32$, или делимое = делитель · частное.

В случае б) число 163 делится на 5 с остатком 3. При этом неполное частное (его иногда называют просто частным) равно 32. Разумно записать такое деление аналогично случаю а): $163 = 5 \cdot 32 + 3$, или делимое = делитель · неполное частное + остаток.

Легко сообразить, что последнюю запись можно использовать и для предыдущего случая, если считать, что в случае а) остаток равен 0.

Итак, мы пришли к удобной форме ***записи деления с остатком***: делимое = делитель · неполное частное + остаток. При этом обязательно должно выполняться неравенство: 0 ≤ остаток < делитель.

Пример 3. Разделим число 27 на 4.

а) Выполнив деление столбиком, найдем неполное частное 6 и остаток 3. Поэтому такое деление можно записать в виде: $27 = 4 \cdot 6 + 3$. Это единственно правильная запись.

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} -24 & 6 \\ \hline 3 & \end{array}$$

б) Число 27 можно записать и в виде: $27 = 4 \cdot 5 + 7$. Однако число 7 не может считаться остатком, так как это число больше делителя 4.

в) Число 27 также можно записать и в виде: $27 = 4 \cdot 7 - 1$. Но эта запись тоже не будет записью деления с остатком, так как перед числом 1 стоит знак минус.

Деление с остатком можно записать и с помощью букв. Если при делении числа a на число b получилось неполное частное c и остаток d, то можно записать: $a = b \cdot c + d$ (при этом $0 \le d < b$). Несмотря на простоту этой записи, она позволяет решать самые разнообразные задачи.

Пример 4. Мальчик раскладывает коллекцию марок. Если он раскладывает по 2 марки, то в конце остается 1 марка. Если раскладывает по 3 марки, то остается 2 марки. Если раскладывает по 5 марок, остается 4 марки. Наконец, если он раскладывает по 7 марок, то в конце остается 6 марок. Какое наименьшее число марок может быть в коллекции?

Легко сообразить, что если бы у мальчика была еще одна марка, то раскладывание марок по 2, 3, 5 и 7 штук происходило бы без остатка. Очевидно, что наименьшее возможное число марок тогда бы равнялось НОК (2; 3; 5; 7). Так как числа 2, 3, 5 и 7 простые, то их НОК совпадает с их произведением, т. е. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. На самом деле у мальчика на одну марку меньше, т. е. 209 марок. Легко проверить, что число 209 при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 – остаток 2, при делении на 5 – остаток 4, при делении на 7 – остаток 6, т. е. удовлетворяет условиям задачи. Итак, наименьшее возможное число марок в коллекции – 209.

Пример 5. Два числа при делении на 8 дают остаток 4. Докажем, что разность и сумма этих чисел без остатка делятся на 8.

Запишем первое число a в виде $a = 8 \cdot b + 4$ (где b – неполное частное), второе число c в виде $c = 8 \cdot d + 4$ (где d – неполное частное). Рассмотрим разность этих чисел $a - c = 8 \cdot b + 4 - 8 \cdot d = 8 \cdot b - 8 \cdot d = 8 \cdot (b - d)$. Эта запись означает, что число $a - c$ кратно 8 (при этом остаток равен 0).

Теперь найдем сумму чисел $a + c = 8 \cdot b + 4 + 8 \cdot d + 4 = 8 \cdot b + 8 \cdot d + 8 = 8\ (b + d + 1)$. Из такой записи видно, что число $a + c$ кратно 8, т. е. остаток равен 0.

Таким образом, разность и сумма чисел a и c без остатка делятся на 8.

Пример 8. Натуральное число a при делении на 8 дает остаток 3. Какой остаток дает число $5 \cdot a$ при делении на: а) 8; б) 4; в) 2?

Так как число a при делении на 8 дает остаток 3, то его можно записать в виде $a = 8 \cdot b + 3$ (где b – неполное частное). Рассмотрим число $5 \cdot a = 5 \cdot (8 \cdot b + 3) = 5 \cdot 8 \cdot b + 5 \cdot 3 = 40 \cdot b + 15$. Выделим в этом выражении наибольшее число, кратное делителю.

а) Представим число $5 \cdot a$ в виде $5 \cdot a = 40 \cdot b + 15 = 40 \cdot b + 8 + 7 = 8 \cdot (5 \cdot b + 1) + 7$. Эта запись означает, что число $5 \cdot a$ при делении на 8 дает неполное частное $5 \cdot b + 1$ и остаток 7.

б) Представим число $5 \cdot a$ в виде $5 \cdot a = 40 \cdot b + 15 = 40 \cdot b + 12 + 3 = 4 \cdot (10 \cdot b + 3) + 3$, т. е. число $5 \cdot a$ при делении на 4 дает частное $10 \cdot b + 3$ и остаток 3.

в) Представим число $5 \cdot a$ в виде $5 \cdot a = 40 \cdot b + 15 = 40 \cdot b + 14 + 1 = 2 \cdot (20 \cdot b + 7) + 1$, т. е. число $5 \cdot a$ при делении на 2 дает частное $20 \cdot b + 7$ и остаток 1.

Пример 7. Для класса купили 8 одинаковых книг, 12 одинаковых альбомов и 20 одинаковых тетрадей. Цена книги, альбома, тетради выражается целым числом рублей. Продавец подсчитал стоимость покупки. Она составила 6714 рублей. Покупатель тут же обратил внимание продавца на ошибку. Как он рассуждал?

Пусть стоимость книги a рублей, альбома – b рублей и тетради – c рублей. Тогда стоимость всех книг $8 \cdot a$ рублей, альбомов – $12 \cdot b$ рублей и книг – $20 \cdot c$ рублей. Подсчитаем цену всех покупки и получим равенство: $8 \cdot a + 12 \cdot b + 20 \cdot c = 6714$. Но такое равенство не может быть верным. Так как числа 8, 12 и 20 кратны 4, то левая часть равенства делится на 4 без остатка. Правая часть (число 6714) делится на 4 с остатком 2. Получаем противоречие.

Обратим внимание, что при делении некоторого числа на натуральное число n может возникнуть один из n возможных ***остатков***: $0, 1, 2, ..., n - 1$. Например, при делении на 2 могут получаться остатки или 0, или 1. При этом числа разбиваются на два вида – имеющие остаток 0 (т. е. четные $2 \cdot m$) и остаток 1 (т. е. нечетные $2 \cdot m + 1$). При делении на 3 возможны остатки или 0, или 1, или 2. Тогда все числа разбиваются на три вида ($3 \cdot m$; $3 \cdot m + 1$; $3 \cdot m + 2$) и т. д.

Пример 8. Найдем все простые числа n, если числа $2 \cdot n + 1$ и $4 \cdot n + 1$ тоже простые.

Заметим, что задачи на простые числа, как правило, непривычны. Поэтому сначала попытаемся заметить какие-то закономерности. Для простых чисел 2, 3, 5, 7, 11 посчитаем числа $2 \cdot n + 1$ и $4 \cdot n + 1$ (см. таблицу).

n	2	3	5	7	11
$2 \cdot n + 1$	5	7	11	15	23
$4 \cdot n + 1$	9	13	21	29	45

Из приведенной таблицы видно, что только для $n = 3$ условия задачи выполнены. Во всех остальных случаях одно из чисел $2 \cdot n + 1$ или $4 \cdot n + 1$ не является простым (делится на 3). Возникает предположение, что кроме $n = 3$ другие простые числа n, удовлетворяющие условию задачи, не существуют. Докажем это.

Все простые числа n ($n \geq 5$) относятся или к виду $n = 3 \cdot m + 1$ (где m – частное), или к виду $n = 3 \cdot m + 2$. Для n этих видов найдем числа $2 \cdot n + 1$ и $4 \cdot n + 1$.

Если $n = 3 \cdot m + 1$, то число $2 \cdot n + 1 = 2 \cdot (3 \cdot m + 1) + 1 = 6 \cdot m + 2 + 1 = 6 \cdot m + 3$ не является простым (так как делится на 3). Тогда число $4 \cdot n + 1$ можно уже не искать.

Если $n = 3 \cdot m + 2$, то число $2 \cdot n + 1 = 2 \cdot (3 \cdot m + 2) + 1 = 6 \cdot m + 4 + 1 = 6 \cdot m + 5$. Это число может быть и простым и составным. Найдем теперь число $4 \cdot n + 1 = 4 \cdot (3 \cdot m + 2) + 1 = 12 \cdot m + 8 + 1 = 12 \cdot m + 9$. Это число составное, так как делится на 3.

Таким образом, было доказано, что при простых числах $n \geq 5$ по крайней мере одно из чисел $2 \cdot n + 1$ или $4 \cdot n + 1$ делится на 3, т. е. не является простым. Итак, условия задачи выполняются только для простого числа 3.

IV. Контрольные вопросы

1. Деление числа с остатком.
2. Форма записи деления числа с остатком.
3. Какие остатки могут возникать при делении на натуральное число n?

V. Задание на уроках

№ 503 (а), 504 (б), 505 (а), 506, 508, 510, 512, 514, 516 (а).

VI. Творческие задания

1. Число a при делении на 11 дает остаток 3. Найдите остаток при делении на 11 числа: а) $5 \cdot a$, б) $6 \cdot a + 3$.

Ответы: а) 4; б) 10.

2. Число a при делении на 24 дает остаток 9. Найдите остаток от деления числа a на: а) 2; б) 3; в) 4; г) 6; д) 8; е) 12.

Ответы: а) 1; б) 0; в) 1; г) 3; д) 1; е) 9.

3. Найдите все простые числа n, если числа $n + 2$ и $n + 4$ тоже простые.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 503 (б), 504 (а), 505 (б), 507, 509, 511 (а), 513, 515, 516 (б), 517.

Глава 7. ТРЕУГОЛЬНИКИ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Формируемые УУД: *предметные:* распознавать треугольники и четырехугольники на чертежах и рисунках, приводить примеры аналогов этих фигур в окружающем мире; изображать треугольники и четырехугольники от руки и с использованием чертежных инструментов на нелинованой и клетчатой бумаге; моделировать, используя бумагу, пластилин, проволоку и др.; исследовать свойства треугольников и четырехугольников путем эксперимента, наблюдения, измерения, моделирования, в том числе с использованием компьютерных программ; вычислять площади прямоугольников; выражать одни единицы измерения площади через другие; решать задачи на нахождение площадей; изображать равные фигуры; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

7.1. ТРЕУГОЛЬНИКИ И ИХ ВИДЫ

Уроки 78, 79. Виды треугольников

Цель: начать изучать простейшие свойства треугольников.

Планируемые результаты: знать виды треугольников, их свойства.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Среди всех многоугольников наименьшее число сторон (и, соответственно, углов) имеет треугольник. Поэтому, казалось бы, треугольник является простейшим многоугольником и его изучение не интересно. Однако это совсем не так по следующим причинам.

1. Треугольник – наиболее изученный из всех многоугольников. В геометрии рассматриваются многие интересные свойства треугольников.

2. Диагоналями, выходящими из одной вершины n-угольника, его можно разбить на $n-2$ треугольника. Тогда некоторые свойства n-угольника можно установить, рассмотрев эти треугольники.

3. В геометрии свойства треугольников изучаются до 9-го класса включительно. Существует огромное количество самых разнообразных, интересных и сложных задач, связанных с треугольниками.

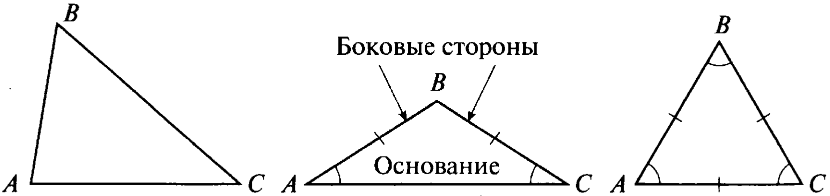
Следовательно, свойства треугольников необходимо изучать. В 5-м классе вам предстоит первичное знакомство с треугольниками.

В зависимости от ***длин сторон*** треугольников их разделяют на три вида: произвольный треугольник (или просто треугольник), равнобедренный треугольник и равносторонний треугольник.

Если длины всех сторон треугольника ***разные***, то такой треугольник называют просто треугольником (рис. 81, *а*).

Если треугольник имеет ***две равные*** стороны, то его называют ***равнобедренным*** (рис. 81, *б*). При этом равные стороны называют ***боковыми сторонами***, третью сторону – ***основанием***.

Треугольник, у которого все стороны равны, называют ***равносторонним*** (рис. 81, *в*).



Треугольник | Равнобедренный треугольник | Равносторонний треугольник

а | б | в

Рис. 81

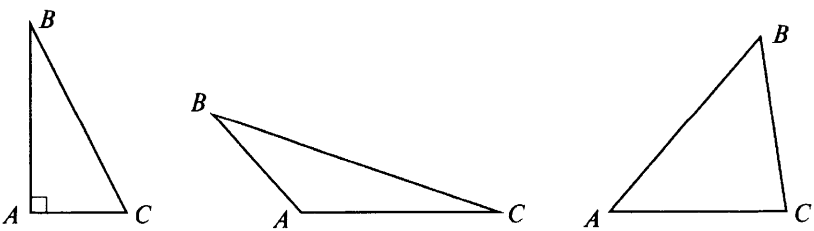
Справедливо ***утверждение***: в треугольнике против большей стороны расположен больший по величине угол. Из этого утверждения следует:

а) в равнобедренном треугольнике ***два угла*** равны и они расположены против боковых сторон;

б) в равностороннем треугольнике все углы равны.

По ***величине углов*** треугольники также разделяют на три вида: прямоугольный треугольник, тупоугольный треугольник и остроугольный треугольник.

Если в треугольнике один угол прямой, то его называют ***прямоугольным*** (рис. 82, *а*). В ***тупоугольном*** треугольнике есть один тупой угол (рис. 82, *б*). Если все углы треугольника острые, то его называют ***остроугольным*** (рис. 82, *в*).



Прямоугольный треугольник | Тупоугольный треугольник | Остроугольный треугольник

а | б | в

Рис. 82

Справедливо еще одно ***утверждение***: сумма всех углов треугольника равна 180°. Поэтому не существует треугольников с двумя прямыми углами, или с прямым и тупым углами, или с двумя тупыми углами.

III. Контрольные вопросы

1. Виды треугольников в зависимости от длин сторон.
2. Виды треугольников в зависимости от величины углов.
3. Утверждение о связи между стороной и противолежащим углом в треугольнике.
4. Утверждение о сумме углов треугольника.

IV. Задание на уроках

№ 523 (1), 524 (а, б), 525 (а), 526 (1), 527, 528 (а), 529 (1), 530.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 523 (2), 524 (в, г), 525 (б), 526 (2, 3), 528 (в), 529 (2), 531, 532.

7.2. ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

Уроки 80, 81. Свойства прямоугольников

Цель: рассмотреть свойства прямоугольников.

Планируемые результаты: уметь использовать свойства прямоугольников при решении задач.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Виды треугольников в зависимости от длин сторон.

2) Тупоугольный треугольник.

3) Определите вид треугольника, углы которого равны 45°, 90°, 45°.

4) Периметр равнобедренного треугольника равен 79 см, основание равно 27 см. Найдите длину боковой стороны.

Вариант 2

1) Виды треугольников в зависимости от величины углов.

2) Равнобедренный треугольник.

3) Определите вид треугольника, углы которого равны 27°, 126°, 27°.

4) Периметр равнобедренного треугольника равен 87 см, боковая сторона равна 32 см. Найдите длину основания.

III. Работа по теме уроков

Рассмотрим один из самых простых четырехугольников – прямоугольник. ***Прямоугольником*** называют четырехугольник, у которого все углы прямые (рис. 83). Заметим, что прямоугольник – одна из самых распространенных фигур. Такую форму имеют пол, потолок, стены, окна, двери в квартире; листы книги, тетради, фанеры и т. д.

Рис. 83

Заметим, что в определении прямоугольника важно, что ***все углы*** прямые. Можно привести примеры четырехугольников, у которых один (рис. 84, *а*) или два (рис. 84, *б*) угла прямые, но они не являются прямоугольниками.

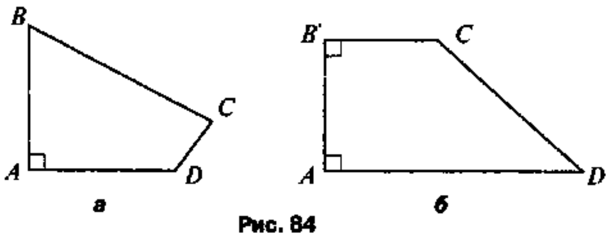


Рис. 84

Утверждение: сумма углов любого четырехугольника равна 360°. Поэтому, если в четырехугольнике три угла прямые, то и четвертый угол прямой. Тогда такой четырехугольник будет прямоугольником.

Перечислим основные ***свойства*** прямоугольника.

1. ***Противоположные стороны*** прямоугольника ***равны***, т. е. $AB = CD$ и $AD = BC$. При этом смежные стороны AB и CD (их иногда называют шириной и длиной) могут быть и различными (рис. 85).

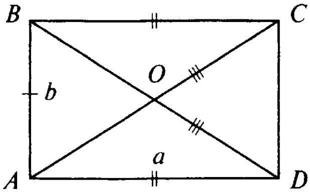


Рис. 85

2. ***Диагонали*** прямоугольника ***равны***, т. е. $AC = BD$. Заметим, что если диагонали четырехугольника равны, то он не обязательно будет прямоугольником (рис. 86).

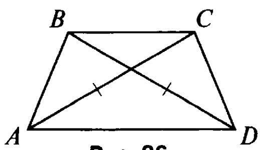


Рис. 86

3. ***Точка*** пересечения диагоналей делит их пополам, т. е. $AO = OC$ и $BO = DO$ (или $AO = OC = BO = DO$, так как диагонали прямоугольника равны).

4. ***Периметр*** прямоугольника со смежными сторонами a и b можно найти по формулам: $P = 2a + 2b$ или $P = 2(a + b)$.

Хотелось бы, чтобы вы четко поняли из рассмотрения этого материала, насколько важно в геометрии (определениях, свойствах) буквально каждое слово.

В геометрии часто встречается прямоугольник, все стороны которого ***равны*** (рис. 87). Такую фигуру называют квадратом. Разумеется, квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника.

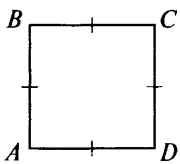


Рис. 87

IV. Контрольные вопросы

1. Определение прямоугольника.
2. Основные свойства прямоугольника.
3. Периметр прямоугольника.

V. Задание на уроках

№ 536 (а), 538 (б), 539, 540, 542 (б), 543 (а), 545, 547, 548, 551.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 536 (б), 537, 538 (а), 541 (б), 542 (а), 543 (б), 544, 546, 547, 549, 550, 552.

7.3. РАВЕНСТВО ФИГУР

Уроки 82, 83. Равные фигуры

Цель: получить представление о равенстве фигур.

Планируемые результаты: уметь находить равные фигуры.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Определение прямоугольника.

2) Свойства сторон прямоугольника.

3) Сумма смежных сторон прямоугольника равна 24 см. Найдите его периметр.

4) Угол между диагоналями прямоугольника равен 56°. Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами.

Вариант 2

1) Определение квадрата.

2) Свойства диагоналей прямоугольника.

3) Сумма смежных сторон прямоугольника равна 32 см. Найдите его периметр.

4) Угол между диагоналями прямоугольника равен 104°. Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами.

III. Работа по теме уроков

Понятие равенства фигур является одним из важнейших в геометрии. На листе бумаги нарисуем какую-нибудь фигуру. Подложим под первый лист бумаги второй. С помощью ножниц по границе вырежем из двух листов бумаги две совершенно ***равные*** фигуры. Две геометрические фигуры называют ***равными***, если их можно совместить, наложив друг на друга. Наиболее часто в геометрии рассматривают равные многоугольники, особенно треугольники.

Для обозначения равных фигур используют знак равенства =. На рисунке 88 приведены равные треугольники ABC и KLM, т. е. $\Delta ABC = \Delta KLM$ (символ Δ обозначает треугольник) и равные прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$.

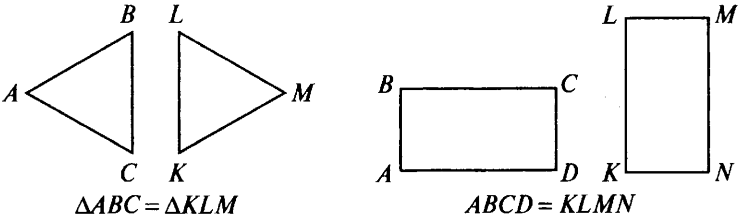


Рис. 88

В равных фигурах ***равны*** все соответственные ***элементы*** (рис. 89). Например, в равных четырехугольниках (параллелограммах) $ABCD$ и $KLMN$ равны: стороны AB и KN, BC и KL (т. е. $AB = KN$, $BC = KL$), углы B и K ($\angle B = \angle K$), диагонали AC и LN ($AC = LN$) и т. д. В частности, из рассмотрения равных параллелограммов $ABCD$ и $KLMN$ было получено и равенство треугольников ABC и KLM.

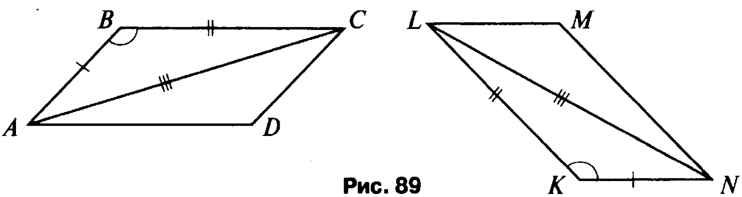


Рис. 89

Разумеется, устанавливать равенство фигур их наложением затруднительно. Например, накладывать друг на друга бетонные прямоугольные плиты весом 20 т просто физически тяжело. Поэтому в математике равенство фигур устанавливается с помощью специальных утверждений – ***признаков*** равенства.

Признаки равенства указывают, равенство каких элементов фигур (сторон, углов или чего-то еще) обеспечивает равенство самих фигур. Например, окружности, имеющие одинаковые радиусы, равны. Таким образом, для равенства окружностей требуется равенство их радиусов (признак равенства окружностей). Для равенства более сложных фигур, в частности многоугольников, требуется равенство большего числа их элементов. Например, для равенства треугольников необходимо равенство их сторон (признак равенства треугольников).

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие равных фигур.
2. Свойство равных фигур.

V. Задание на уроках

№ 557 (1), 558, 559 (3), 560 (2), 561 (1), 563 (а), 564, 566 (а), 567 (а, б), 568.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 556, 557 (2), 559 (1), 560 (1), 561 (2), 563 (б), 565, 566 (б), 567 (в, г).

7.4. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Уроки 84, 85. Вычисление площади прямоугольника

Цель: иметь представление о площади фигуры.

Планируемые результаты: научиться находить площадь прямоугольника.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Понятие равных фигур.

2) Разделите равносторонний треугольник на три равных треугольника тремя отрезками, имеющими общий конец. Сделайте рисунок.

3) Верно ли утверждение: два четырехугольника равны, если их стороны попарно равны? Ответ необходимо обосновать (сделайте чертеж).

Вариант 2

1) Свойство равных фигур.

2) Разделите равносторонний треугольник на шесть равных треугольника тремя отрезками, проходящими через общую точку. Сделайте рисунок.

3) Верно ли утверждение: два треугольника равны, если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника? Ответ необходимо обосновать (сделайте чертеж).

III. Работа по теме уроков

Понятие площади фигуры относится к первичным и может быть дано только интуитивно на основе некоторых аналогий, сравнений, примеров и т. д.

Пример 1

а) Фермер засеял пшеницей одинаковым образом два поля: одно – треугольной формы, другое – прямоугольной формы. Собранный урожай оказался одинаковым. По-видимому, поверхности этих полей были одинаковыми.

б) При равномерной покраске пола в одной комнате потребовалась одна банка краски, в другой комнате – две такие же банки. Разумно считать, что поверхности пола в этих комнатах также отличаются в 2 раза.

в) Рассмотрим прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ (рис. 90). Можно полагать, что поверхность прямоугольника $ABCD$ меньше поверхности прямоугольника $KLMN$, так как на поверхности первого прямоугольника укладывается 8 одинаковых квадратов, а на поверхности второго прямоугольника – 15 таких же квадратов.

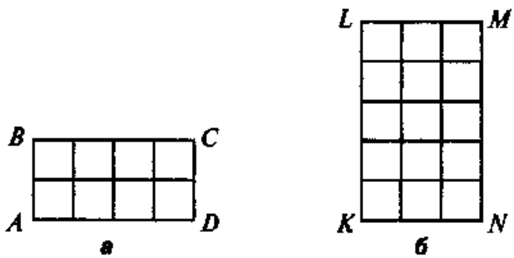


Рис. 90

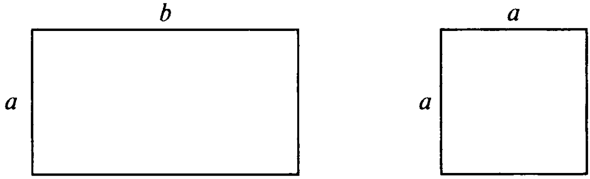
Будем считать, что поверхность фигуры характеризуется его ***площадью***, т. е. числом условных квадратов, которые укладываются на этой поверхности.

Далее возникает вопрос об измерении (и, если возможно, вычислении) площади фигуры. Для этого нужна единица измерения площади. Так как мы знаем единицы измерения длины, то за единицу измерения площади разумно взять единичный квадрат – квадрат со стороной, равной единичному отрезку. Такой квадрат называют ***квадратной единицей***. Так, сантиметру (см) соответствует квадратный сантиметр (см^2), метру (м) – квадратный метр (м^2), километру (км) – квадратный километр (км^2).

Если фигуру можно разбить на единичные квадраты, то площадь фигуры равна числу квадратных единиц, ее составляющих. Так, на рисунке 90, *а* прямоугольник $ABCD$ разбит на $2 \cdot 4 = 8$ квадратов со стороной 1 см. Его площадь равна 8 см^2. Прямоугольник $KLMN$ разбит на $5 \cdot 3 = 15$ таких же квадратов (рис. 90, *б*) и его площадь равна 15 см^2.

Для нахождения площади прямоугольника необязательно его разбивать на единичные квадраты. Если измерить стороны прямоугольника выбранной единицей длины и полученные результаты перемножить, то получим значение площади в соответствующих квадратных единицах.

Таким образом, площадь S ***прямоугольника*** со сторонами a и b (рис. 91, *а*) равна $S = a \cdot b$, площадь ***квадрата*** со стороной a (рис. 91, *б*) равна $S = a^2$.

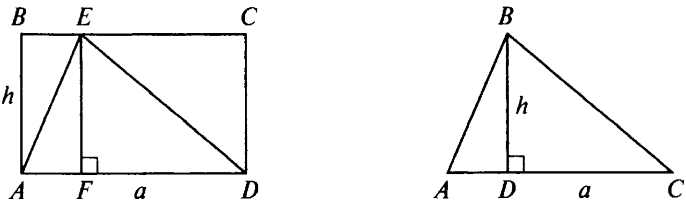


а б

Рис. 91

Формула для площади прямоугольника позволяет получить формулу для площади треугольника.

Пример 2. Выведем формулу для площади треугольника.



а б

Рис. 92

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AD = a$ и $AB = h$ (рис. 92, *а*). Его площадь равна $S = a \cdot h$. На стороне BC выберем произвольную точку E и построим прямоугольник $ABEF$. Его диагональ AE делит прямоугольник на два равных треугольника ABE и AEF. Очевидно, что четырехугольник $FECD$ является прямоугольником. Диагональ ED делит его на два равных треугольника FED и ECD.

Тогда площадь треугольника AED в 2 раза меньше площади прямоугольника $ABCD$ и может быть вычислена по формуле

$S = a \cdot h : 2$. Заметим, что отрезок EF образует со стороной AD прямой угол.

Таким образом, площадь ΔABC (рис. 92, *б*) находится по формуле $S = a \cdot h : 2$. При этом отрезок BD образует прямой угол со стороной AC. Такой отрезок называют ***высотой*** треугольника, проведенной из вершины B к противолежащей стороне AC.

Заметим, что фигуры, имеющие одинаковую площадь, называют ***равновеликими***. При этом фигуры могут иметь совершенно разную форму. Очевидно, что любые равные фигуры являются равновеликими.

Выбор единицы площади зависит от размеров фигуры. Площадь фигур на тетрадном листе измеряют в квадратных сантиметрах (см^2), площадь квартиры – в квадратных метрах (м^2), площадь поверхности моря – в квадратных километрах (км^2). Приведем соотношения между единицами измерения площадей: 1 км^2 = 1 млн м^2; 1 м^2 = 100 дм^2; 1 дм^2 = 100 см^2.

Для измерения земельных участков применяют другие единицы площади: для дачных участков – ар (а) или сотка, для фермерских полей – гектар (га). При этом: 1 а = 1 сотка = 100 м^2, 1 га = 100 а = 10 000 м^2.

При вычислении площади многоугольника можно провести диагонали, выходящие из одной вершины. Тогда многоугольник разбивается на несколько треугольников, площади которых можно вычислить. Заметим, что для некоторых видов четырехугольников существуют простые формулы для вычисления площадей.

Площадь фигур сложной формы можно приблизительно измерить с помощью палетки. ***Палетка*** представляет собой прозрачную пластинку, на которую нанесена квадратная сетка со стороной квадрата 1 см. При наложении палетки на фигуру подсчитывается число квадратов, умещающихся в границе фигуры.

IV. Контрольные вопросы

1. Формула для площади прямоугольника.
2. Вычисление площади квадрата.
3. Формула для площади треугольника.
4. Равновеликие фигуры.
5. Использование палетки для измерения площади фигуры.

V. Задание на уроках

№ 573 (1), 574 (2), 575, 578, 579 (а), 582 (а), 588, 590, 597.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 573 (2), 574 (1), 576, 577, 579 (б), 583, 589, 591, 598.

Уроки 86, 87. Контрольная работа № 4 по теме «Делимость чисел. Треугольники и четырехугольники»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип уроков: уроки развивающего контроля.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в четырех вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – несколько сложнее). Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (могут быть немного сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает учащимся некоторую возможность выбора. При таких же критериях оценки в случае решения вариантов 3, 4 дается дополнительно один балл (учитывая более высокую сложность вариантов). Поэтому в случае вариантов 3, 4 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или самим учащимся. Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Напишите пять последовательных натуральных чисел, которые делятся и на 3 и на 5 (начиная с наименьшего).

2. Найдите наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел 12 и 30.

3. Разложите число 45 на простые множители. Выпишите все делители числа 45.

4. Найдите цифру X, если пятизначное число $7X51X$ делится на 3.

5. Оле надо разложить 183 карандаша по коробкам вместимостью 12 карандашей. Сколько коробок ей понадобится, чтобы разложить все карандаши? Окажется ли среди них неполная? Если да, то сколько еще карандашей в нее можно положить?

6. Периметр равнобедренного треугольника равен 73 см, боковая сторона равна 24 см. Найдите основание треугольника.

Вариант 2

1. Напишите пять последовательных натуральных чисел, которые делятся и на 3 и на 7 (начиная с наименьшего).

2. Найдите наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел 20 и 30.

3. Разложите число 63 на простые множители. Выпишите все делители числа 63.

4. Найдите цифру X, если пятизначное число $81X5X$ делится на 3.

5. Оле надо разложить 187 карандашей по коробкам вместимостью 15 карандашей. Сколько коробок ей понадобится, чтобы разложить все карандаши? Окажется ли среди них неполная? Если да, то сколько еще карандашей в нее можно положить?

6. Периметр равнобедренного треугольника равен 79 см, основание равно 27 см. Найдите боковую сторону треугольника.

Вариант 3

1. Напишите шесть последовательных натуральных чисел, которые делятся и на 8 и на 12 (начиная с наименьшего).

2. Найдите наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел 84 и 360.

3. Найдите наименьшее трехзначное число, которое при делении на 3, 6 и 8 дает в остатке 2.

4. Пятизначное число $7X52Y$ делится на 18. Найдите цифры X и Y.

5. Юра живет в квартире № 86 шестиэтажного дома. В этом доме во всех подъездах на всех этажах по 4 квартиры. В каком подъезде и на каком этаже живет Юра?

6. Длины сторон (в сантиметрах) прямоугольника выражаются целыми числами. Его периметр равен 16 см. Рассмотрите все возможные варианты и найдите наибольшую площадь прямоугольника. Каким будет прямоугольник в этом случае?

Вариант 4

1. Напишите шесть последовательных натуральных чисел, которые делятся и на 12 и на 18 (начиная с наименьшего).

2. Найдите наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел 84 и 300.

3. Найдите наименьшее трехзначное число, которое при делении на 6, 7 и 8 дает в остатке 3.

4. Пятизначное число $83X2Y$ делится на 18. Найдите цифры X и Y.

5. Юра живет в квартире № 58 девятиэтажного дома. В этом доме во всех подъездах на всех этажах по 4 квартиры. В каком подъезде и на каком этаже живет Юра?

6. Длины сторон (в сантиметрах) прямоугольника выражаются целыми числами. Его периметр равен 12 см. Рассмотрите все возможные варианты и найдите наибольшую площадь прямоугольника. Каким будет прямоугольник в этом случае?

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	3	2	3
2	4	5	2	2
...				
6	2	3	3	5

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Ответы ко всем задачам контрольной работы (можно вывесить на стенде).

V. Ответы к задачам контрольной работы

Вариант 1

1. 15, 30, 45, 60, 75.
2. НОК (12; 30) = 60, НОД (12; 30) = 6.
3. $45 = 3^2 \cdot 5$; 1, 3, 5, 9, 15, 45.
4. 1, 4, 7.
5. 16 коробок, 9 карандашей.
6. 25 см.

Вариант 2

1. 21, 42, 63, 84, 105.
2. НОК (20; 30) = 60, НОД (20; 30) = 10.
3. $63 = 3^2 \cdot 7$; 1, 3, 7, 9, 21, 63.
4. 2, 5, 8.
5. 13 коробок, 8 карандашей.
6. 26 см.

Вариант 3

1. 24, 48, 72, 96, 120, 144.
2. НОК (84; 360) = 2520, НОД (84; 360) = 12.
3. 122.
4. $Y = 0, X = 4$; $Y = 2, X = 2$; $Y = 4, X = 0, X = 9$; $Y = 6, X = 7$; $Y = 8, X = 5$.
5. Третий подъезд, четвертый этаж.
6. 16 см^2, квадрат.

Вариант 4

1. 36, 72, 108, 144, 180, 216.
2. НОК (84; 300) = 2100, НОД (84; 300) = 12.
3. 171.
4. $Y = 0, X = 5$; $Y = 2, X = 3$; $Y = 4, X = 1$; $Y = 6, X = 8$; $Y = 8, X = 6$.
5. Второй подъезд, шестой этаж.
6. 9 см^2, квадрат.

Глава 8. ДРОБИ

Формируемые УУД: *предметные:* моделировать в графической, предметной форме понятия и свойства, связанные с понятием *обыкновенной дроби*; записывать и читать обыкновенные дроби; соотносить дроби и точки на координатной прямой; формулировать, записывать с помощью букв основное свойство обыкновенной дроби, преобразовывать дроби; применять различные приемы сравнения дробей, выбирая наиболее подходящий в зависимости от конкретной ситуации; находить способ решения задач, связанных с упорядочением, сравнением дробей; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников.

взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

8.1. ДОЛИ

Уроки 88, 89. Доли величины

Цель: дать представление о долях.

Планируемые результаты: понимать смысл доли величины.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

В практических целях использование только натуральных чисел недостаточно. Предположим, что мы имеем линейку с метровой шкалой и пытаемся измерить рост людей. Он окажется, в основном, в промежутке между 1 м и 2 м (великаны и карлики встречаются очень редко). Приходится сделать вывод, что почти все люди на Земле имеют одинаковый рост. Разумеется, это не так и людям приходится покупать одежду разного роста и размера.

Поэтому возникает потребность в меньшей единице измерения – в сантиметре. Для этого 1 метр делят на 100 равных долей и получают новую единицу измерения, с помощью которой можно проводить более точные измерения, – сантиметр. Таким образом при решении практических задач возникли дробные числа.

Необходимость появления дробных чисел связана также и с математическими соображениями. На координатной оси мы отмечали натуральные числа точками (рис. 93). Видно, что между точками $A(1)$ и $B(2)$ можно поставить бесконечное множество точек. Выберем, например, точку C. Понятно, что точке C не может соответствовать натуральное число. В то же время если точкам A и B соответствуют числа, то и точке C должно соответствовать какое-то (но не натуральное) число. Опять возникает потребность в новых числах.

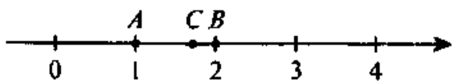
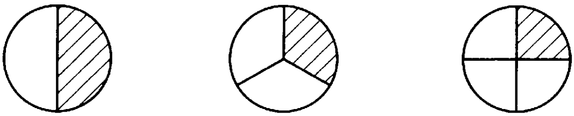


Рис. 93

Заметим, что дроби (дробные числа) возникли примерно 4000 лет назад в Древнем Египте и Древнем Вавилоне. Уже тогда умели складывать и вычитать дроби. При этом для облегчения вычислений даже существовали специальные таблицы.

Итак, постепенно начнем знакомиться с долями и дробями.

Пример 1. Разделим круг на две (рис. 94, *а*), три (рис. 94, *б*) и четыре (рис. 94, *в*) равные части. Одну из таких частей заштрихуем. Тогда на рисунке 94, *а* заштрихована половина (или одна вторая) круга, на рисунке 94, *б* – одна треть круга, на рисунке 94, *в* – одна четверть круга.

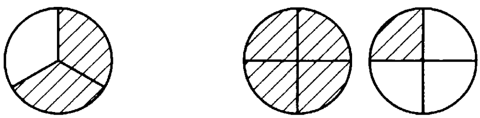


а **б** **в**

Рис. 94

Пример 2

а) Теперь проиллюстрируем понятие «две третьих». Разделим круг на три равные части (рис. 95, *а*). Выберем (заштрихуем) две такие части. Тогда заштрихованная область составляет две третьих доли всего круга.



а **б**

Рис. 95

б) Разберемся с понятием «пять четвертых». Аналогично разделим круг на четыре равные части (рис. 95, *б*). Теперь надо выбрать (заштриховать) пять таких частей. Но из круга мы можем выбрать только четыре части (т. е. целиком круг). Тогда нарисуем второй такой же круг (рис. 95, *б*) и вновь разделим его на четыре равные части. Теперь дополнительно выберем (заштрихуем) недостающую нам еще одну часть. Заштрихованная на двух кругах область составляет пять четвертых одного круга.

Пример 3. Сравним одну треть и одну седьмую по величине.

Опять обратимся к помощи круга (рис. 96). При изображении понятия «одна треть» мы делим круг на три равные части и выбираем одну из них (область *а*), понятия «одна седьмая» – делим круг на семь равных частей и выбираем одну из них (область *б*). Тогда наглядно видно, что одна треть больше одной седьмой.

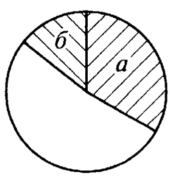


Рис. 96

III. Задание на уроках

№ 603, 606, 607, 608 (2), 609 (в), 610 (а), 613.

IV. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 604, 605, 608 (1), 609 (а), 610 (б), 614.

8.2. ЧТО ТАКОЕ ДРОБЬ

Уроки 90–92. Понятие дроби

Цель: рассмотреть характеристики дроби.

Планируемые результаты: уметь пользоваться понятием дроби.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Сколько сантиметров составляет четверть метра?

2) Объясните с помощью круга понятие «три восьмых».

3) Туристы проехали на машине 36 км, а затем треть этого расстояния прошли пешком. Какое расстояние преодолели туристы?

4) В книге 80 страниц. Витя в первый день прочитал четверть всех страниц, а во второй день – половину оставшихся. Сколько страниц ему осталось прочитать?

Вариант 2

1) Сколько сантиметров составляет одна пятая метра?

2) Объясните с помощью круга понятие «пять восьмых».

3) Туристы проехали на машине 48 км, а затем четверть этого расстояния прошли пешком. Какое расстояние преодолели туристы?

4) В книге 90 страниц. Витя в первый день прочитал треть всех страниц, а во второй день – половину оставшихся. Сколько страниц ему осталось прочитать?

III. Работа по теме уроков

Понятие *доли* неудобно при решении задач. Желательно для записи долей (частей) использовать более удобное обозначение.

Пример 1. Разделим прямоугольник на пять равных частей и выберем три такие части (рис. 97). Тогда заштрихованная область составляет три пятых части прямоугольника. Для записи этой части используют специальное обозначение: $\frac{3}{5}$. Запись части в таком виде называют ***дробью***.

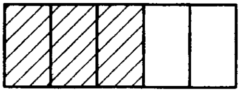


Рис. 97

В записи $\frac{3}{5}$ число, стоящее внизу (под чертой), называют ***знаменателем*** дроби. Оно показывает, на сколько частей делился целый предмет. Число, стоящее вверху (над чертой), называют ***числителем*** дроби. Оно показывает, сколько таких частей выбрали. Итак, имеем в дроби:

3 – числитель

5 – знаменатель.

Разумеется, записи $\frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{7}{3}, \frac{8}{5}, \frac{0}{4}$ (эта запись означает, что предмет разделили на четыре части, но ничего не взяли) тоже являются дробями. Таким образом, любую дробь можно записать в виде $\frac{a}{b}$. При этом натуральное число b показывает, что предмет разделен на b равных частей. Натуральное число (или ноль) a показывает, что было взято a таких частей. Число a – числитель, b – знаменатель дроби.

Итак, общий вид записи дроби:

a – числитель

b – знаменатель.

Дроби $\frac{a}{b}$ делят на два типа:

1) ***правильная*** дробь, если ее числитель меньше знаменателя, т. е. $a < b$ (например, $\frac{3}{5}, \frac{6}{7}, \frac{0}{3}$ и т. д.);

2) ***неправильная*** дробь, если ее числитель не меньше знаменателя, т. е. $a \geq b$ (например, $\frac{5}{4}, \frac{8}{3}, \frac{7}{7}$ и т. д.).

Для наглядности надо уметь изображать дроби (как и натуральные числа) на координатной прямой.

Пример 2. Изобразим на координатной оси дроби $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{3}$ и $\frac{5}{3}$.

Разделим единичный отрезок (между точками 0 и 1) на три равные части и отсчитаем две такие части (рис. 98). Получим точку A, которой соответствует дробь $\frac{2}{3}$.

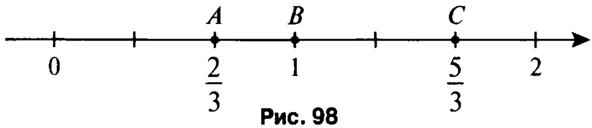


Рис. 98

Теперь возьмем три таких части и получим точку B, которой соответствует дробь $\frac{3}{3}$. Видно, что точке B соответствует и натуральное число 1, т. е. $\frac{3}{3} = 1$.

Понятно, что на единичном отрезке от 0 до 1 отсчитать пять частей невозможно. Тогда делим следующий единичный отрезок от 1 до 2 вновь на три равные части. Теперь, начиная от точки 0, отсчитаем пять равных частей, и получим точку C, которой соответствует дробь $\frac{5}{3}$.

Видно, что на координатной прямой точки нанесены в следующем порядке: A, B и C. Тогда $\frac{2}{3} < \frac{3}{3} < \frac{5}{3}$, так как точке, расположенной правее, соответствует большее число. При этом дробь $\frac{3}{3} = 1$.

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие дроби.
2. Числитель и знаменатель дроби. Их смысл.
3. Общий вид записи дроби.
4. Правильные и неправильные дроби.
5. Изображение дробей на координатной прямой. Объяснить на примере.

V. Задание на уроках

№ 620, 622 (б, д), 623 (а), 625 (б), 629, 631 (а), 632, 636 (а), 637 (б), 639 (в), 641 (а), 643, 646, 647 (а), 649 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 621, 622 (в, е), 623 (б), 625 (а), 628, 631 (б), 634, 636 (б), 637 (а), 639 (г), 641 (б), 644, 647 (б), 649 (б).

8.3. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

Уроки 93–95. Основное свойство дроби и его применение

Цель: освоить основное свойство дроби.

Планируемые результаты: уметь применять свойство дроби.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Запись дроби. Числитель дроби.

2) Правильные дроби.

3) Используя квадрат, изобразите дробь $\frac{1}{4}$.

4) На координатной прямой изобразите дробь $\frac{4}{3}$.

5) На столе лежат 3 желтых, 4 красных и 6 синих карандашей. Какую часть всех карандашей составляют красные карандаши? Ответ запишите в виде дроби.

Вариант 2

1) Запись дроби. Знаменатель дроби.

2) Неправильные дроби.

3) Используя квадрат, изобразите дробь $\frac{3}{4}$.

4) На координатной прямой изобразите дробь $\frac{6}{5}$.

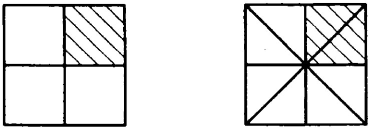
5) На столе лежат 4 желтых, 2 красных и 5 синих карандашей. Какую часть всех карандашей составляют синие карандаши? Ответ запишите в виде дроби.

III. Работа по теме уроков

Обсудим важнейшую особенность дробей — ***основное свойство дроби***, которое находит самое широкое применение.

Пример 1. Используя квадрат, изобразим дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{8}$.

а) Разделим квадрат на 4 равные части и одну из них закрасим (выберем). Тогда закрашенная часть составляет $\frac{1}{4}$ квадрата (рис. 99, *а*).



а б

Рис. 99

б) Теперь каждую четверть квадрата разделим на две равные части. Получается, что квадрат поделен на 8 равных частей. При этом две из этих частей закрашены. Оказалось, что закрашены $\frac{2}{8}$ квадрата (рис. 99, *б*).

В случаях а) и б) была закрашена одна и та же часть квадрата. Значит, дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{8}$ выражают одну и ту же величину. Такие дроби называют ***равными***, т. е. $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

Можно было каждую четверть исходного квадрата (рис. 99, *а*) разделить и на три части. Тогда квадрат будет разделен на 12 равных частей. При этом закрашенная часть будет составлять $\frac{3}{12}$ квадрата, т. е. $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.

Из рассмотренного примера видно, что если делить закрашенную (выделенную) часть квадрата (а также и его остальные части) на *n* равных долей, то дробь, выражающая закрашенную часть квадрата, ***не меняется***. Другими словами, если умножить числитель и знаменатель дроби на одно и то же число, то значение дроби не изменится. В итоге была получена цепочка равенств: $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{2}{8}, \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$ и т. д.

Эти равенства можно рассмотреть и в обратном порядке: $\frac{3}{12} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4}, \frac{2}{8} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{4}$. Такая запись означает, что числитель и знаменатель дроби можно разделить на одно и то же число. При этом величина дроби не меняется.

Таким образом, пришли к важнейшему выводу, который и является ***основным свойством дроби***: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится дробь, равная данной. С помощью букв это свойство можно записать в виде: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ (где $c \neq 0$).

Основное свойство позволяет преобразовывать дроби и выполнять действия с ними.

Пример 2. Заменим дробь $\frac{3}{7}$ равной ей дробью со знаменателем 84.

Разделим число 84 на 7 и получим 12, т. е. $84 = 7 \cdot 12$. Поэтому числитель и знаменатель данной дроби умножим на число 12. Получаем: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 12}{7 \cdot 12} = \frac{36}{84}$. Говорят, что дробь $\frac{3}{7}$ ***привели к новому знаменателю***. Число 12, на которое умножили числитель и знаменатель, называют ***дополнительным множителем***.

Очевидно, что дробь $\frac{3}{7}$ можно привести и к любому другому знаменателю, кратному 7. Например: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$, $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{9}{21}$, $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}$ и т. д.

Пример 3. Рассмотрим дробь $\frac{39}{91}$. Ее числитель и знаменатель имеют общий делитель, равный 13. Поэтому числитель и знаменатель дроби $\frac{39}{91}$ можно разделить на число 13 и заменить данную дробь более простой: $\frac{39}{91} = \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 13} = \frac{3}{7}$. Говорят, что дробь $\frac{39}{91}$ сократили на число 13. При этом в полученной дроби $\frac{3}{7}$ числитель и знаменатель не имеют общих делителей, кроме 1. Такую дробь называют ***несократимой***. Заметим, что из всех дробей, равных некоторой данной дроби, несократимая дробь только ***одна***.

Итак, чтобы сократить дробь, ее числитель и знаменатель нужно разделить на их общий делитель (а еще лучше — на ***наибольший*** общий делитель).

Пример 4. Сократим дробь $\frac{540}{756}$.

Сократить данную дробь можно разными способами. Рассмотрим самые распространенные способы.

а) Очевидно, что числитель и знаменатель дроби — четные числа. Поэтому сначала сократим дробь на 2: $\frac{540}{756} = \frac{2 \cdot 270}{2 \cdot 378} = \frac{270}{378}$.

По той же причине эту дробь вновь можно сократить на 2: $\frac{270}{278} = \frac{2 \cdot 135}{2 \cdot 189} = \frac{135}{189}$. Числитель и знаменатель этой дроби кратны 3.

Поэтому сократим ее на 3: $\frac{135}{189} = \frac{3 \cdot 45}{3 \cdot 63} = \frac{45}{63}$. Вновь сократим дробь на 3: $\frac{45}{63} = \frac{3 \cdot 15}{3 \cdot 21} = \frac{15}{21}$. Еще раз сократим дробь на 3: $\frac{15}{21} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5}{7}$. Очевидно, что эта дробь уже несократима.

Выполненные сокращения можно записать в виде:

$$\frac{540}{756} = \frac{2 \cdot 270}{2 \cdot 378} = \frac{270}{378} = \frac{2 \cdot 135}{2 \cdot 189} = \frac{135}{189} = \frac{3 \cdot 45}{3 \cdot 63} = \frac{45}{63} = \frac{3 \cdot 15}{3 \cdot 21} =$$

$$= \frac{15}{21} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5}{7}.$$

Видно, что сокращение выполнялось «по цепочке» – постепенно и достаточно долго.

б) По признакам делимости на 9 и 4 числитель и знаменатель дроби $\frac{540}{756}$ делятся на эти числа. Так как числа 9 и 4 взаимно простые, то числитель и знаменатель делятся на произведение $9 \cdot 4 = 36$. Поэтому данную дробь сократим на 36: $\frac{540}{756} = \frac{36 \cdot 15}{36 \cdot 21} = \frac{15}{21}$. Такую дробь сократить труда не составит: $\frac{15}{21} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5}{7}$. Заметим, что при сокращении были использованы признаки делимости чисел и вычисления были выполнены быстрее.

в) Найдем наибольший общий делитель числителя и знаменателя. Для этого разложим их на простые множители: $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ и $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$. Тогда НОД (540; 756) $= 2^2 \cdot 3^3$. Поэтому сократим числитель и знаменатель данной дроби на это число: $\frac{540}{756} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 7} = \frac{5}{7}$. Из всех способов последний, по-видимому, является наиболее универсальным и быстрым.

IV. Контрольные вопросы

1. Основное свойство дроби.
2. Запись основного свойства дроби с помощью букв.
3. Запись дроби с новым знаменателем. Дополнительный множитель. Объясните на примере.
4. Сокращение дроби.
5. Несократимая дробь.

V. Задание на уроках

№ 656, 657 (а, б), 658 (а), 659 (в, г), 660 (а), 661 (б), 664 (а), 666 (а), 668 (а, б), 669, 673 (а), 676 (а), 680 (в, г), 683 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 657 (в, г), 658 (б), 659 (а, б), 660 (б), 661 (а), 664 (б), 666 (б), 668 (в, г), 670, 672, 673 (б), 676 (б), 680 (а, б), 683 (б).

8.4. ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

Уроки 96–98. Общий знаменатель дробей

Цель: научиться находить общий знаменатель дробей.

Планируемые результаты: уметь приводить дроби к общему знаменателю.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Приведите дробь $\frac{7}{3}$ к знаменателю 9, 12, 15, 18.

2) Сократите дробь:

а) $\frac{3 \cdot 8 \cdot 12}{4 \cdot 5 \cdot 18}$;

б) $\frac{135}{180}$;

в) $\frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3^5 \cdot 63}$.

3) Выпишите все правильные дроби со знаменателем 10. Сократите те из них, которые можно сократить.

Вариант 2

1) Приведите дробь $\frac{6}{5}$ к знаменателю 15, 20, 25, 35.

2) Сократите дробь:

а) $\frac{5 \cdot 6 \cdot 15}{3 \cdot 25 \cdot 7}$;

б) $\frac{128}{144}$;

в) $\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 35}{2^2 \cdot 15 \cdot 9}$.

3) Выпишите все правильные дроби со знаменателем 15. Сократите те из них, которые можно сократить.

III. Работа по теме уроков

Для решения многих задач дроби, имеющие разные знаменатели, заменяют на равные им дроби с одинаковыми знаменателями. В этих случаях говорят о ***приведении дробей к общему знаменателю***. При этом обычно выбирают ***наименьший общий знаменатель*** – тогда вычисления будут наиболее простыми.

Пример 1. Дроби $\frac{5}{48}$ и $\frac{7}{6}$ приведем к общему знаменателю.

Знаменатель 6 второй дроби является делителем знаменателя 48 первой дроби. Поэтому НОК (48; 6) = 48. Следовательно, в качестве наименьшего общего знаменателя выбираем знаменатель первой дроби. Таким образом, дробь $\frac{7}{6}$ надо привести к знаменателю 48. Найдем дополнительный множитель: 48 : 6 = 8. Поэтому получаем $\frac{7}{6} = \frac{7 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{56}{48}$. Итак, дроби $\frac{5}{48}$ и $\frac{7}{6} = \frac{56}{48}$ приведены к общему знаменателю 48.

Пример 2. Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{7}{6}$ и $\frac{3}{35}$.

Знаменатели 6 и 35 дробей являются взаимно простыми числами. Поэтому НОК (6; 35) = 6 · 35 = 210. Это число является наименьшим общим знаменателем данных дробей. Приведем их к общему знаменателю: $\frac{7}{6} = \frac{7 \cdot 35}{6 \cdot 35} = \frac{245}{210}$ и $\frac{3}{35} = \frac{3 \cdot 6}{35 \cdot 6} = \frac{18}{210}$.

Пример 3. Дроби $\frac{31}{168}$ и $\frac{41}{180}$ приведем к общему знаменателю.

Найдем НОК (168; 180). Для этого разложим числа на простые множители: $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ и $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Тогда НОК (168; 180) = $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ – наименьший общий знаменатель дробей. Найдем дополнительные множители: 2520 : 168 = $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 : (2^3 \cdot 3 \cdot 7) = 3 \cdot 5 = 15$ и $2520 : 180 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \times$ $\times 7 : (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2 \cdot 7 = 14$. Приведем дроби к общему знаменателю: $\frac{31}{168} = \frac{31 \cdot 15}{168 \cdot 15} = \frac{465}{2520}$ и $\frac{41}{180} = \frac{41 \cdot 14}{180 \cdot 14} = \frac{574}{2520}$. Таким образом, дроби $\frac{31}{168} = \frac{465}{2520}$ и $\frac{41}{180} = \frac{574}{2520}$ приведены к общему знаменателю 2520.

IV. Контрольные вопросы

1. Приведение дробей к общему знаменателю.
2. Наименьший общий знаменатель дробей.

V. Задание на уроках

№ 690 (а, г), 691 (а, г, д), 692 (а, з), 693 (а–в), 694 (в, г), 695 (а, в, г), 696 (а–в), 697 (а, б).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 690 (б, в), 691 (б, е, ж), 692 (б, д, ж), 693 (г—е), 694 (а, б), 695 (б, з), 696 (г—е), 697 (в, г).

8.5. СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ

Уроки 96–101. Как сравнивают дроби

Цель: научиться сравнивать дроби.

Планируемые результаты: уметь сравнивать различные дроби.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Как найти наименьший общий знаменатель дробей?

2) Выпишите несколько общих знаменателей дробей $\frac{3}{14}$ и $\frac{5}{21}$. Найдите наименьший общий знаменатель этих дробей и приведите их к такому знаменателю.

3) Приведите дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{9}$ к наименьшему общему знаменателю.

Вариант 2

1) Как найти дополнительные множители к дробям?

2) Выпишите несколько общих знаменателей дробей $\frac{7}{10}$ и $\frac{4}{15}$. Найдите наименьший общий знаменатель этих дробей и приведите их к такому знаменателю.

3) Приведите дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{8}$ к наименьшему общему знаменателю.

III. Работа по теме уроков

Разумеется, нужно уметь ***сравнивать*** дроби (как мы делали с натуральными числами), т. е. уметь установить, какая из дробей больше и какая меньше. Как и в случае натуральных чисел, большей дроби на координатной прямой соответствует точка, наиболее удаленная от точки с координатой O.

Пример 1. На координатной прямой изображены точки, соответствующие дробям a, b и c (рис. 100). Сравним эти дроби.

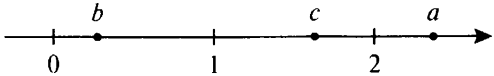


Рис. 100

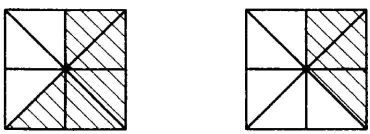
Так как дробь a наиболее удалена от точки O, то она самая большая. Дробь c находится ближе к точке O, поэтому $c < a$. Наконец, дробь b ближе всего расположена к точке O, т. е. $b < c$ и $b < a$. Тогда получаем $b < c < a$.

Во многих случаях при сравнении дробей можно обойтись без координатной прямой. Проще всего сравнивать дроби, имеющие что-то одинаковое: или знаменатели или числители.

Из двух дробей ***с одинаковыми знаменателями*** больше та, у которой числитель больше.

Пример 2. Сравним дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{8}$.

В соответствии с приведенным правилом $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$. Понять это легко на примере квадрата (рис. 101, *а*, *б*). Делим квадраты на одинаковое число равных частей (а именно 8). Но в случае а) мы выбираем большее число таких одинаковых частей (5), чем в случае б), где были выбраны 3 части. Тогда $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$.



а **б**

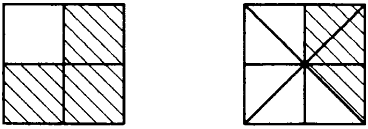
Рис. 101

Из двух дробей ***с одинаковыми числителями*** больше та, у которой знаменатель меньше.

Пример 3. Сравним дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{8}$.

По приведенному правилу $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$. Для понимания вновь используем квадраты. Первый квадрат разделим на 4 равные части и выберем три из них (рис. 102, *а*). Второй квадрат делим на 8 равных частей и выбираем также три из них (рис. 102, *б*). Очевидно, что каждая часть первого квадрата больше каждой части второго.

Выбираем же мы в обоих случаях одинаковое число частей. Поэтому $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$.



а *б*

Рис. 102

Разумеется, легко сравнить и две произвольные дроби, если их привести к ***наименьшему общему знаменателю***.

Пример 4. Сравним дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{7}$.

Так как знаменатели дробей взаимно простые числа, то наименьший общий знаменатель равен $4 \cdot 7 = 28$. Тогда $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$ и $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{16}{28}$. Очевидно, что $\frac{21}{28} > \frac{16}{28}$, т. е. $\frac{3}{4} > \frac{4}{7}$.

В ряде случаев можно сравнить дроби, не приводя их к общему знаменателю. Для этого каждую дробь сравнивают с одним и тем же вспомогательным числом.

Пример 5. Сравним дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{9}$.

Оценим каждую из дробей: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} < \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (т. е. $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$) и $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{10}{18} > \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ (т. е. $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$). Итак, получили $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ и $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$. Поэтому $\frac{2}{5} < \frac{5}{9}$. В качестве вспомогательного числа была использована дробь $\frac{1}{2}$.

IV. Контрольные вопросы

1. Сравнение дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Как сравнить дроби с одинаковыми числителями?
3. Сравнение произвольных дробей.

V. Задание на уроках

№ 701 (а, б), 702 (а), 703 (б), 704 (а–в), 705 (а), 706 (в), 707 (а, в), 708, 713 (а), 714 (б), 718 (а, б), 719, 721 (а, в), 722 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 701 (в, г), 702 (б), 703 (а), 704 (г–е), 705 (б), 706 (г), 707 (б, е), 709 (а, г), 711, 713 (б), 714 (а), 718 (в, г), 721 (б, г), 722 (б).

8.6. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДРОБИ

Уроки 102–104. Связь между натуральными и дробными числами

Цель: понять, что натуральные числа являются и дробными числами.

Планируемые результаты: уметь делить любые натуральные числа.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Сравнение дробей с одинаковыми знаменателями.

2) Запишите дроби $\frac{1}{3}; \frac{3}{7}; \frac{5}{9}; \frac{2}{5}$ в том порядке, как они расположены на координатной прямой.

3) Найдите несколько чисел, которые можно подставить вместо k и получить верное двойное неравенство $\frac{3}{5} < k < \frac{4}{5}$.

Вариант 2

1) Сравнение дробей с одинаковыми числителями.

2) Запишите дроби $\frac{1}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{7}; \frac{2}{3}$ в том порядке, как они расположены на координатной прямой.

3) Найдите несколько чисел, которые можно подставить вместо k и получить верное двойное неравенство $\frac{4}{7} < k < \frac{5}{7}$.

III. Работа по теме уроков

При изучении деления натуральных чисел отмечалось, что деление возможно только при условии, что ***делимое кратно делителю***. Результатом такого деления будет также ***натуральное число***. Вопрос о делении произвольных натуральных чисел не рассматривался. Теперь этот вопрос необходимо обсудить.

Пример 1

а) Имеется 6 шоколадок, нужно разделить их поровну между тремя детьми. Сколько достанется каждому ребенку?

Такая задача решается делением. Так как делимое кратно делителю, то получаем $6 : 3 = 2$. Поэтому каждому ребенку достанется по 2 шоколадки.

б) Слегка изменим условие задачи. Теперь имеется 5 шоколадок и их нужно разделить поровну опять между тремя детьми. Сколько в этом случае достанется каждому ребенку?

Очевидно, что и эта задача должна решаться делением. Сказать, что в таком случае поделить нельзя, невозможно. Раз есть дети и шоколадки, то каждый ребенок что-то должен получить (иначе дети этого не поймут). Понятно, что целое число шоколадок каждый ребенок уже не получит. Поступим следующим образом. Разделим каждую из пяти шоколадок на 3 равные части. Каждому ребенку дадим от каждой шоколадки по одной части. Дети получат по 5 таких частей, т. е. каждый ребенок получит по $\frac{5}{3}$ шоколадки. Ход решения задачи запишем в виде: $5 : 3 = \frac{5}{3}$.

Из рассмотренного примера сделаем важнейшие выводы.

1. Делить можно любые натуральные числа.

2. Результатом такого деления будет или натуральное число, или дробное число.

3. Не существует принципиальных различий между натуральными числами и дробными числами.

Оказывается, что любое натуральное число можно записать в виде ***дроби***, причем в виде дроби с ***произвольным знаменателем***.

Пример 2. Представим в виде дроби натуральное число 1. Разделим единичный отрезок, например, на 3 равные части (рис. 103). Одной такой части соответствует дробь $\frac{1}{3}$, а трем частям – дробь $\frac{3}{3}$. Но 3 части – это весь единичный отрезок целиком. Поэтому натуральное число 1 и дробь $\frac{3}{3}$ изображаются одной и той же точкой координатной прямой, т. е. $1 = \frac{3}{3}$.

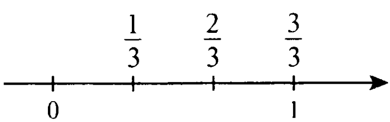


Рис. 103

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \ldots = \frac{10}{10} = \ldots \frac{123}{123} = \ldots .$$

Следовательно, натуральное число 1 можно представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой равны.

Разумеется, подобным образом можно представить и любое другое натуральное число. Например,

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \ldots = \frac{30}{10} = \ldots = \frac{369}{123} = \ldots.$$

В этом легко убедиться, если использовать основное свойство дроби. Тогда получим $3 = \frac{3}{1}$. Запись $\frac{3}{1}$ также является дробью, и эта дробь уже несократима.

Таким образом, любое натуральное число n можно представить в виде дроби со знаменателем 1, т. е. $n = \frac{n}{1}$. Если по основному свойству дроби умножить ее числитель и знаменатель на любое натуральное число k, то получим $n = \frac{n}{1} = \frac{n \cdot k}{k}$. Такая запись означает, что любое натуральное число n можно представить в виде дроби $\frac{n \cdot k}{k}$ с произвольным знаменателем k.

Итак, натуральные числа, как и дробные, записываются в виде дробей. Поэтому все числа, которые мы пока изучили, являются ***дробями***. Некоторые из этих дробей одновременно являются и ***натуральными числами***.

Можно делить ***любые*** натуральные числа. Результатом деления является дробь, числитель которой – делимое m, а знаменатель – делитель n, т. е. $m : n = \frac{m}{n}$. При этом дробь $\frac{m}{n}$ может оказаться и натуральным числом.

IV. Контрольные вопросы

1. Деление натуральных чисел.
2. Представьте натуральное число n в виде дроби со знаменателем k.
3. Связь между натуральными числами и дробными числами.

V. Задание на уроках

№ 727 (а, б, г), 728 (в, д), 729 (а), 731 (б), 733 (а), 735 (б), 736 (а, в, д), 737 (а), 739, 740 (а, б), 742 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 727 (в, д), 728 (б, е), 729 (б), 731 (а), 733 (б), 735 (а), 736 (б, г, е), 737 (б), 740 (в, г), 742 (б).

Уроки 105, 106. Контрольная работа № 5 по теме «Дроби. Треугольники и четырехугольники»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип уроков: уроки развивающего контроля.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в четырех вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – несколько сложнее). Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (могут быть немного сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает учащимся некоторую возможность выбора. При таких же критериях оценки в случае решения вариантов 3, 4 дается дополнительно один балл (учитывая более высокую сложность вариантов). Поэтому в случае вариантов 3, 4 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или самим учащимся. Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Начертите координатную прямую (единичный отрезок 10 клеток). Отметьте на ней дроби $\frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{6}{5}$.

2. Дроби $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{6}$ запишите в порядке возрастания.

3. Укажите три общих знаменателя дробей $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{18}$. Найдите наименьший общий знаменатель этих дробей и приведите их к этому знаменателю.

4. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 6 см, боковой стороны – 8 см. Найдите периметр этого треугольника.

5. В книге 160 страниц. В первый день Петя прочитал $\frac{3}{10}$ книги, во второй день – $\frac{1}{4}$ книги. Сколько страниц осталось прочитать Пете?

6. Запишите три дроби, расположенные между дробями $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{5}$.

Вариант 2

1. Начертите координатную прямую (единичный отрезок 12 клеток). Отметьте на ней дроби $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}$.

2. Дроби $\frac{4}{7}, \frac{1}{4}, \frac{9}{8}, \frac{2}{5}$ запишите в порядке возрастания.

3. Укажите три общих знаменателя дробей $\frac{7}{10}$ и $\frac{8}{15}$. Найдите наименьший общий знаменатель этих дробей и приведите их к этому знаменателю.

4. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 9 см, боковой стороны – 6 см. Найдите периметр этого треугольника.

5. В книге 180 страниц. В первый день Петя прочитал $\frac{2}{9}$ книги, во второй день – $\frac{1}{5}$ книги. Сколько страниц осталось прочитать Пете?

6. Запишите три дроби, расположенные между дробями $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{6}$.

Вариант 3

1. Начертите координатную прямую (единичный отрезок 12 клеток). Отметьте на ней дроби $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ и $\frac{7}{12}$. Сравните эти дроби и запишите ответ в виде двойного неравенства.

2. Сократите дробь $\frac{1512}{2268}$.

3. Дроби $\frac{1}{28}, \frac{1}{24}, \frac{1}{12}$ приведите к наименьшему общему знаменателю.

4. В прямоугольном треугольнике длины сторон равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите периметр и площадь этого треугольника.

5. В книге 160 страниц. В первый день Петя прочитал $\frac{1}{5}$ книги, во второй день – $\frac{3}{8}$ остатка и в третий день – $\frac{1}{4}$ очередного остатка. Сколько страниц осталось прочитать Пете?

6. Найдите все дроби со знаменателем 26 или 25, заключенные между дробями $\frac{5}{26}$ и $\frac{6}{25}$.

Вариант 4

1. Начертите координатную прямую (единичный отрезок 15 клеток). Отметьте на ней дроби $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{7}{15}$. Сравните эти дроби и запишите ответ в виде двойного неравенства.

2. Сократите дробь $\frac{1188}{1584}$.

3. Дроби $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{27}$ приведите к наименьшему общему знаменателю.

4. В прямоугольном треугольнике длины сторон равны 5 см, 12 см и 13 см. Найдите периметр и площадь этого треугольника.

5. В книге 180 страниц. В первый день Петя прочитал $\frac{1}{9}$ книги, во второй день – $\frac{5}{8}$ остатка и в третий день – $\frac{2}{5}$ очередного остатка. Сколько страниц осталось прочитать Пете?

6. Найдите все дроби со знаменателем 32 или 31, заключенные между дробями $\frac{7}{32}$ и $\frac{8}{31}$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	3	2	3
2	4	5	2	2
...				
6	2	3	3	5

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;
± – число решивших задачу со значительными погрешностями;
– – число не решивших задачу;
∅ – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Ответы ко всем задачам контрольной работы (можно вывесить на стенде).

V. Ответы к задачам контрольной работы

Вариант 1

1. Дроби отмечены.
2. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}$.
3. 36, 108, 216; 36; $\frac{15}{36}$ и $\frac{14}{36}$.
4. 22 см.
5. 72 стр.
6. $\frac{21}{120}, \frac{22}{120}, \frac{23}{120}$.

Вариант 2

1. Дроби отмечены.
2. $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{9}{8}$.
3. 30, 90, 150; 30; $\frac{21}{30}$ и $\frac{16}{30}$.
4. 21 см.
5. 95 стр.
6. $\frac{25}{168}, \frac{26}{168}, \frac{27}{168}$.

Вариант 3

1. $\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.
2. $\frac{2}{3}$.
3. $\frac{6}{168}, \frac{7}{168}, \frac{14}{168}$.
4. 12 см и 6 см^2.
5. 60 стр.
6. $\frac{5}{25}$ и $\frac{6}{26}$.

Вариант 4

1. $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$.
2. $\frac{3}{4}$.
3. $\frac{9}{278}, \frac{18}{278}, \frac{14}{278}$.
4. 30 см и 30 см^2.
5. 36 стр.
6. $\frac{7}{31}$ и $\frac{8}{32}$.

VI. Подведение итогов уроков

Глава 9. ДЕЙСТВИЯ С ДРОБЯМИ

Формируемые УУД: *предметные:* моделировать сложение и вычитание дробей с помощью реальных объектов, рисунков, схем; формулировать, записывать с помощью букв правила действий с обыкновенными дробями; вычислять значения числовых выражений, содержащих дроби; применять свойства арифметических действий для рационализации вычислений; комментировать ход вычисления; использовать приемы проверки результатов; проводить несложные исследования, связанные со свойствами дробных чисел, опираясь на числовые эксперименты; решать текстовые задачи, содержащие дробные данные; использовать приемы решения задач на нахождение части целого и целого по его части; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

9.1. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

Уроки 107–111. Сумма и разность дробей

Цель: научиться складывать и вычитать дроби.

Планируемые результаты: уметь находить сумму и разность дробей.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

В предыдущей главе было расширено понятие числа – рассмотрены дроби, и ранее изученные натуральные числа стали лишь частным случаем дробных чисел. (Заметим, что понятие числа будет обобщаться и далее.) Были рассмотрены основное свойство дроби, приведение дробей к общему знаменателю, сравнение дробей.

Следующий и очевидный шаг – изучить действия с дробями: сложение, вычитание, умножение и деление. Этим вопросам и посвящена данная глава.

Начнем обсуждение с первого действия – ***сложения*** дробей.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{3}{11}$ и $\frac{4}{11}$.

Разделим прямоугольник на 11 равных частей (рис. 104).

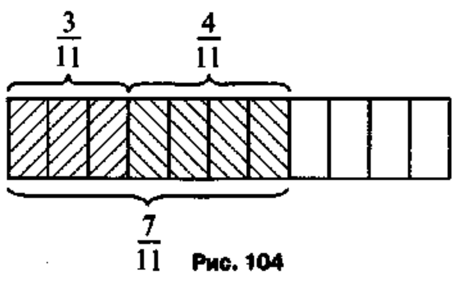


Рис. 104

Если к $\frac{3}{11}$ прямоугольника прибавить $\frac{4}{11}$ прямоугольника, то получим $\frac{7}{11}$ прямоугольника.

Из этого примера получаем ***правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями***: при сложении дробей складываются их числители, а знаменатель не меняется. С использованием букв это правило можно записать в виде: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

Пример 2. Используя правило, сложим дроби:

а) $\frac{5}{13}+\frac{7}{13}=\frac{5+7}{13}=\frac{12}{13}$;

б) $\frac{4}{15}+\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{4+7+1}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

Заметим, что если при сложении получается сократимая дробь, то ее сокращают.

Рассмотрим теперь ***вычитание дробей***. Действие вычитания определяется как действие, обратное сложению. Вычесть из одного числа другое значит найти такое число, которое при сложении с вычитаемым дает уменьшаемое.

Пример 3

а) $18-7=11$, так как $11+7+18$;

б) $\frac{8}{7}-\frac{5}{7}=\frac{3}{7}$, так как $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}$.

Такие рассуждения приводят к правилу ***вычитания дробей*** с одинаковыми знаменателями (аналогичному правилу сложения): при вычитании дробей вычитаются их числители, а знаменатель не меняется. С использованием букв это правило записывают в виде: $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

Пример 4. Используя правило, вычтем дроби:

а) $\frac{8}{9}-\frac{3}{9}=\frac{8-3}{9}=\frac{5}{9}$;

б) $\frac{12}{13}-\frac{5}{13}-\frac{6}{13}=\frac{12-5-6}{13}=\frac{1}{13}$.

Разумеется, правила сложения и вычитания дробей можно применять совместно.

Пример 5. Выполним действия:

$\frac{17}{15}-\frac{11}{15}+\frac{4}{15}=\frac{17-11+4}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями их предварительно приводят к наименьшему общему знаменателю, а затем используют рассмотренные правила.

Пример 6. Выполним действия:

а) $\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=\frac{9}{12}+\frac{16}{12}=\frac{9+16}{12}=\frac{25}{12}$;

б) $\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{16}{12}-\frac{9}{12}=\frac{16-9}{12}=\frac{7}{12}$;

в) $\frac{4}{9}-\frac{1}{12}+\frac{5}{6}=\frac{16}{36}-\frac{3}{36}+\frac{30}{36}=\frac{16-3+30}{36}=\frac{43}{36}$.

Для дробей, как и для натуральных чисел, справедливы ***переместительное и сочетательное*** свойства сложения.

Пример 7

а) $\frac{3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{5}{8}+\frac{3}{7}$ – переместительное свойство;

б) $\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{8}\right)+\frac{2}{3}=\frac{3}{7}+\left(\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\right)$ – сочетательное свойство.

В заключение рассмотрим более сложную (олимпиадную) задачу.

Пример 8. Найдем сумму дробей

$$a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{18\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

Сразу очевидны два соображения:

1) нет смысла перемножать числа, стоящие в знаменателях дробей, – по какой-то причине задача записана именно в данном виде;

2) нельзя привести все дроби к общему знаменателю – получится настолько громоздкое выражение, что дальнейшее решение станет невозможным.

Поэтому решить задачу «в лоб» не удастся. Надо искать такие особенности («хитрости») задачи, которые позволили бы решить ее достаточно просто.

Рассмотрим любое слагаемое в этой сумме, например, $\frac{1}{13\cdot 14}$. Очевидно, что дробь с таким знаменателем может получиться только при сложении или вычитании дробей со знаменателями 13 и 14. Легко проверить, что

$$\frac{1}{13\cdot 14}=\frac{1}{13}-\frac{1}{14}=\frac{14}{13\cdot 14}-\frac{13}{13\cdot 14}=\frac{14-13}{13\cdot 14}=\frac{1}{13\cdot 14}.$$

Итак, получили $\frac{1}{13\cdot 14}=\frac{1}{13}-\frac{1}{14}$.

Подобная закономерность наблюдается для любой дроби, входящей в сумму a: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{18\cdot 19}=\frac{1}{18}-\frac{1}{19}$, $\frac{1}{19\cdot 20}=\frac{1}{19}-\frac{1}{20}$.

Тогда сумму a запишем в виде

$$a = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{18} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}.$$

В этом выражении остаются только первая и последняя дроби, т. е. $a = \frac{1}{1} - \frac{1}{20} = \frac{20-1}{20} = \frac{19}{20}$. В итоге нашли $a = \frac{19}{20}$.

III. Контрольные вопросы

1. Правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.
3. Как сложить и вычесть дроби с разными знаменателями?

IV. Задание на уроках

№ 746 (а, г), 747 (б), 748 (а), 749 (а, в, е), 751 (в, д), 753 (а), 754 (б), 755 (а, б), 756 (а, в), 757, 759, 760 (а), 761 (в), 764 (а, б), 765, 768 (а).

V. Творческие задания

Найдите сумму дробей:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{9 \cdot 10}$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$;

в) $\frac{1}{21 \cdot 22} + \frac{1}{22 \cdot 23} + \frac{1}{23 \cdot 24} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$;

г) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 101}$;

д) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \ldots + \frac{1}{98 \cdot 100}$.

Ответы: а) $\frac{9}{10}$; б) $\frac{99}{100}$; в) $\frac{79}{2100}$; г) $\frac{50}{101}$; д) $\frac{49}{200}$.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 746 (б, д), 747 (г), 748 (б), 749 (б, д), 751 (б, г), 752, 753 (б), 754 (а), 755 (в, г), 756 (б, г), 758, 760 (б), 761 (г), 764 (в, г), 768 (б).

9.2. СМЕШАННЫЕ ДРОБИ

Уроки 112–115. Выделение целой и дробной части в неправильной дроби

Цель: рассмотреть смешанные дроби.

Планируемые результаты: уметь выделять целую и дробную части в дроби.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

2) Выполните действия:

а) $\frac{7}{6}-\frac{5}{6}$;

б) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$;

в) $\frac{13}{20}-\left(\frac{6}{35}-\frac{3}{28}\right)$.

3) Два слесаря выполняют работу за 4 ч. Если бы работал один из них, то он выполнил бы работу за 6 ч. Какую часть работы выполняет каждый слесарь за час?

Вариант 2

1) Правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

2) Выполните действия:

а) $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$;

б) $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$;

в) $\frac{17}{20}-\left(\frac{8}{35}-\frac{5}{28}\right)$.

3) Два слесаря выполняют работу за 6 ч. Если бы работал один из них, то он выполнил бы работу за 8 ч. Какую часть работы выполняет каждый слесарь за час?

III. Работа по теме уроков

В начале изучения дробей отмечалось, что существуют ***неправильные*** дроби, т. е. такие, у которых числитель не меньше знаменателя. Обсудим еще одну форму записи неправильных дробей. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Разделим поровну 5 шоколадок между тремя детьми.

Ранее такое деление делалось следующим образом. Каждую из шоколадок делили на 3 равные части и от каждой шоколадки давали каждому ребенку по одной такой части. Тогда каждый ребенок получает $\frac{5}{3}$ шоколадки.

Очевидно, что распределить шоколадки можно и по-другому. Сначала каждому ребенку дадим по одной целой шоколадке. Оставшиеся две шоколадки будем дробить на три равные части. Каждому ребенку достанется по $\frac{1}{3}$ от каждой из двух шоколадок, т. е. всего по $\frac{2}{3}$ шоколадки. В итоге ребенок получит $1+\frac{2}{3}$ шоколадки.

Для такого числа, которое состоит из натурального числа 1 и правильной дроби $\frac{2}{3}$, есть специальное обозначение $1\frac{2}{3}$. Просто числа 1 и $\frac{2}{3}$ записывают рядом без знака «плюс». Такую запись называют ***смешанной дробью***. При этом натуральное число 1 называют ***целой частью*** смешанной дроби, а правильную дробь $\frac{2}{3}$ — ее ***дробной частью***. Запись $1\frac{2}{3}$ читают следующим образом: один и две третьих.

Понятно, что при делении шоколадок двумя способами каждый ребенок получает одинаковое количество шоколадок. Поэтому справедливо равенство $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$. Это равенство показывает, что неправильную дробь $\frac{5}{3}$ можно записать в виде смешанной дроби $1\frac{2}{3}$. При этом говорят, что из неправильной дроби $\frac{5}{3}$ ***выделена целая часть***.

Пример 2. Выделим целую часть из дроби $\frac{281}{12}$.

Уголком разделим числитель дроби 281 на знаменатель 12. Получаем частное 23 и остаток 5. Тогда целая часть смешанной дроби 23, дробная часть $\frac{5}{12}$, так как $\frac{281}{12}=23+\frac{5}{12}=23\frac{5}{12}$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,281 & 12 \\ \cline{2-2}
\underline{24} & 23 \\
-\,41 & \\
\underline{36} & \\
5 &
\end{array}
$$

Часто приходится выполнять и обратное преобразование — записывать смешанную дробь в виде неправильной дроби.

Пример 3. Представим в виде неправильной дроби число $3\frac{2}{3}$.

Запишем смешанную дробь $3\frac{2}{3}$ в виде суммы натурального числа 3 и правильной дроби $\frac{2}{3}$. Преобразуем эту сумму, используя правило сложения дробей: $3\frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{3}{1} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3}$.

Эти вычисления можно записать и короче: $3\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{11}{3}$.

Таким образом, неправильные дроби можно записывать в виде смешанных дробей.

IV. Контрольные вопросы

1. Смешанная дробь, ее целая и дробная части.
2. Выделение целой части в неправильной дроби.
3. Как представить смешанную дробь в виде неправильной дроби?

V. Задание на уроках

№ 773 (а, б), 774 (а), 775, 777 (а), 778 (б), 780 (а), 781 (а, б), 783 (а), 786 (а, б), 787 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 773 (в, г), 774 (б), 776, 777 (б), 778 (а), 780 (б), 781 (в, г), 783 (б), 786 (в, г), 787 (б).

9.3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ СМЕШАННЫХ ДРОБЕЙ

Уроки 116–119. Сумма и разность смешанных дробей

Цель: научиться складывать и вычитать смешанные дроби.

Планируемые результаты: уметь находить сумму и разность смешанных дробей.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Запишите неправильную дробь $\frac{147}{8}$ в виде смешанной дроби.

2) Смешанную дробь $3\frac{7}{11}$ запишите в виде неправильной дроби.

3) Выразите $5\frac{1}{4}$ ч в минутах.

4) Турист 48 мин шел пешком, $\frac{7}{10}$ ч плыл на лодке и 30 мин ехал на автобусе. Какое время турист находился в пути? Ответ выразите в часах.

Вариант 2

1) Запишите неправильную дробь $\frac{137}{6}$ в виде смешанной дроби.

2) Смешанную дробь $5\frac{3}{7}$ запишите в виде неправильной дроби.

3) Выразите $3\frac{1}{5}$ ч в минутах.

4) Турист 45 мин шел пешком, $\frac{11}{12}$ ч плыл на лодке и 20 мин ехал на автобусе. Какое время турист находился в пути? Ответ выразите в часах.

III. Работа по теме уроков

Так как появилось новое понятие – смешанные дроби, то нужно научиться складывать и вычитать такие дроби. Складывать смешанные дроби легко. При этом необходимо учитывать, что смешанная дробь – сумма натурального числа и правильной дроби.

Пример 1. Найдем сумму смешанных дробей:

а) $3\frac{1}{3}+4\frac{1}{6}=\left(3+\frac{1}{3}\right)+\left(4+\frac{1}{6}\right)=(3+4)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=7+\frac{2+1}{6}=$ $=7+\frac{3}{6}=7+\frac{1}{2}=7\frac{1}{2};$

б) $5\frac{2}{3}+3\frac{5}{6}=\left(5+\frac{2}{3}\right)+\left(3+\frac{5}{6}\right)=(5+3)+\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)=8+\frac{4+5}{6}=$ $=8+\frac{9}{6}=8+\frac{3}{2}=8+1\frac{1}{2}=9\frac{1}{2}.$

Вычитать смешанные дроби сложнее. Для этого существуют разные способы. Самый очевидный из них – обратить смешанные дроби в неправильные и уже их вычитать.

Пример 2. Найдем разность смешанных дробей

$$7\frac{1}{8}-4\frac{5}{6}=\frac{57}{8}-\frac{29}{6}=\frac{57\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{29\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{171}{24}-\frac{116}{24}=\frac{171-116}{24}=$$

$$=\frac{55}{24}=2\frac{7}{24}.$$

Другой способ нахождения разности смешанных дробей аналогичен нахождению их суммы, учитывая, что смешанная дробь – сумма натурального числа и дроби.

Пример 3. Найдем разность смешанных дробей $7\frac{1}{6}-2\frac{2}{3}$.

Сначала из дроби $7\frac{1}{6}$ вычтем целую часть дроби $2\frac{2}{3}$: $7\frac{1}{6}-2=5\frac{1}{6}$. Тогда $7\frac{1}{6}-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{6}-\frac{2}{3}$. Чтобы из числа $5\frac{1}{6}$ вычесть $\frac{2}{3}$, «займем» единицу в целой части числа $5\frac{1}{6}$. Получаем

$$5\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=\left(4+1\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{3}=4+\frac{7}{6}-\frac{2}{3}=4+\frac{7}{6}-\frac{4}{6}=4+\frac{3}{6}=4+\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}.$$

Коротко решение можно записать в виде

$$7\frac{1}{6}-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=4+1\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=4+\frac{7}{6}-\frac{2}{3}=4+\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}.$$

IV. Контрольные вопросы

1. Как складывают смешанные дроби? Поясните на примерах.
2. Как вычитают смешанные дроби? Поясните на примерах.

V. Задание на уроках

№ 792 (а, в), 793 (б), 794 (а, в, д), 796 (а), 797 (б), 799 (а, в), 803 (б, г), 804 (а, б), 808 (а), 812 (б), 813, 817 (а), 818 (б).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 792 (б, д), 793 (в), 794 (б, г, е), 796 (б), 797 (а), 799 (б, г), 803 (а, в), 804 (д, е). 808 (б), 812 (а), 815, 817 (б), 818 (а).

9.4. УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

Уроки 120–124. Произведение дробей

Цель: научиться умножать дроби.

Планируемые результаты: уметь находить произведение дробей.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Выполните действия со смешанными дробями:

а) $5\frac{1}{3} + 2\frac{5}{6}$;

б) $7\frac{5}{8} - 3\frac{1}{2}$.

2) Найдите сумму дробей $7\frac{3}{7} + 2\frac{5}{11} + 2\frac{4}{7} + 2\frac{6}{11}$ оптимальным способом.

3) От куска проволоки длиной $16\frac{3}{4}$ м Петя отрезал $3\frac{1}{2}$ м, а Вася – $5\frac{1}{8}$ м. Сколько метров проволоки осталось?

Вариант 2

1) Выполните действия со смешанными дробями:

а) $3\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6}$;

б) $8\frac{7}{8} - 5\frac{3}{4}$.

2) Найдите сумму дробей $2\frac{9}{13} + 8\frac{6}{11} + 2\frac{4}{13} + 1\frac{5}{11}$ оптимальным способом.

3) От куска проволоки длиной $12\frac{7}{8}$ м Петя отрезал $4\frac{1}{4}$ м, а Вася – $3\frac{1}{2}$ м. Сколько метров проволоки осталось?

III. Работа по теме уроков

Необходимо обсудить произведение дробей. Для этого рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Найдем произведение дробей $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{7}$.

Удобно предложить геометрическую модель (рис. 105). Рассмотрим квадрат со стороной 1 м. Одну сторону квадрата разделим на 4 равные части, другую – на 7 частей. Точки деления соединим отрезками. Получим $4 \cdot 7 = 28$ одинаковых прямоугольников. Так как площадь квадрата 1 м^2, то площадь прямоугольника $\frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{28}$ м^2.

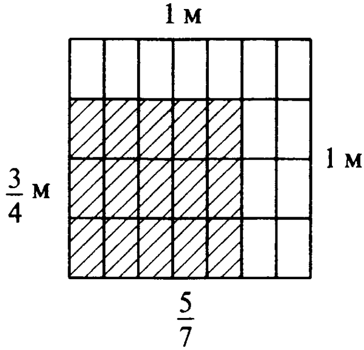


Рис. 105

Теперь внутри квадрата рассмотрим прямоугольник со сторонами $\frac{3}{4}$ м и $\frac{5}{7}$ м (заштрихован). Его площадь равна $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$ м^2 (произведение сторон).

В то же время этот прямоугольник состоит из $3 \cdot 5 = 15$ маленьких прямоугольников общей площадью $\frac{15}{28} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$ м^2.

Итак, рассматривая разные подходы к вычислению площади заштрихованного прямоугольника, получили равенство $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$. Такое равенство означает, что при умножении дробей отдельно перемножаются их числители и знаменатели.

Итак, ***правило умножения дробей***: при умножении дробей нужно перемножить их числители и их знаменатели, первое произведение записать числителем, второе – знаменателем новой дроби. С помощью букв это правило записывают в виде: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Обратите внимание на то, что перед умножением числителей и знаменателей их удобно сократить на общие множители.

Пример 2. Умножим дроби:

а) $\frac{7}{16} \cdot \frac{24}{35} = \frac{7 \cdot 24}{16 \cdot 35} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}$;

б) $2\frac{5}{7} \cdot \frac{14}{19} = \frac{19}{7} \cdot \frac{14}{19} = \frac{19 \cdot 14}{7 \cdot 19} = \frac{14}{7} = 2$;

в) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{7}$.

Пример 3. Акции завода стоили 140 млн рублей. За первый год цена акций возросла в $1\frac{1}{7}$ раза, за второй год – в $1\frac{1}{8}$ раза. Сколько сейчас стоят акции завода?

Увеличение цены в разы означает умножение. Например, шоколадка стоила 120 руб. и подорожала в 2 раза. Тогда сейчас она стоит $120 \cdot 2 = 240$ руб. Поэтому спустя два года акции завода будут стоить $140 \cdot 1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{1}{8} = 140 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} = \frac{140 \cdot 8 \cdot 9}{7 \cdot 8} = 20 \cdot 9 = 180$ млн руб.

IV. Контрольные вопросы

1. Правило умножения дробей.
2. Запишите правило умножения дробей с помощью букв.

V. Задание на уроках

№ 823 (а, б), 824 (а, в), 825 (в), 826 (г), 828, 833 (а), 835 (а), 836 (а), 838 (б), 839 (а), 840 (а, в), 842 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 823 (в, г), 824 (г, д), 825 (г), 826 (д), 829, 833 (б, в), 834, 835 (б), 836 (в, г), 838 (а), 839 (б), 840 (б, г), 842 (в), 844.

9.5. ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Уроки 125–129. Частное при делении дробей

Цель: научиться делить дроби.

Планируемые результаты: уметь находить частное при делении дробей.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Умножьте дроби:

а) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$;

б) $3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{7}$;

в) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8}$.

2) Выполните действия оптимальным способом

$5\frac{1}{3} \cdot 6\frac{1}{7} + 3\frac{6}{7} \cdot 5\frac{1}{3}$.

3) Выразите $7\frac{5}{12}$ ч в минутах.

Вариант 2

1) Умножьте дроби:

а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{12}$;

б) $5\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{11}$;

в) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9}$.

2) Выполните действия оптимальным способом

$7\frac{1}{3} \cdot 7\frac{6}{7} + 2\frac{1}{7} \cdot 7\frac{1}{3}$.

3) Выразите $5\frac{11}{15}$ ч в минутах.

III. Работа по теме уроков

Предварительно нам понадобятся некоторые вспомогательные понятия.

Рассмотрим дробь $\frac{3}{7}$ и дробь $\frac{7}{3}$, в которой, по сравнению с первой дробью, числитель и знаменатель поменялись местами. Тогда дробь $\frac{7}{3}$ называют ***обратной*** дроби $\frac{3}{7}$. Если использовать буквы, то дробь $\frac{b}{a}$ является ***обратной*** дроби $\frac{a}{b}$.

Теперь найдем дробь, обратную дроби $\frac{7}{3}$, и вновь получим дробь $\frac{3}{7}$. Таким образом, дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$ обратные по отношению друг к другу. Поэтому такие дроби называют ***взаимно обратными***. В общем случае ***взаимно обратные*** дроби можно записать в виде: $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$.

Легко сообразить, что ***произведение*** взаимно обратных дробей равно 1, например, $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1, \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1, 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ (при этом натуральное число 3 рассматривается как дробь $\frac{3}{1}$). С помощью букв свойство взаимно обратных дробей записывают в виде: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Используя понятие взаимно обратных дробей, можно действие деления дробей свести к действию умножения дробей.

Пример 1. Разделим дробь $\frac{3}{7}$ на $\frac{5}{14}$.

Предположим, что в результате деления получится пока неизвестная нам дробь $\frac{m}{n}$, т. е. $\frac{3}{7} : \frac{5}{14} = \frac{m}{n}$. Из этого равенства найдем делимое. Оно равняется произведению частного и делителя, т. е. $\frac{m}{n} \cdot \frac{5}{14} = \frac{3}{7}$. Чтобы найти дробь $\frac{m}{n}$, умножим обе части этого равенства на дробь, обратную $\frac{5}{14}$, т. е. на дробь $\frac{14}{5}$. Получаем $\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{5}{14}\right) \cdot \frac{14}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{5}, \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{5}{14} \cdot \frac{14}{5}\right) = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{5}, \frac{m}{n} = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{5}, \frac{m}{n} = \frac{6}{5}$.

Теперь можно сформулировать правило ***деления*** дробей: чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю. Используя буквы, запишем это правило в виде: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Пример 2. Выполним деление дробей:

а) $\frac{3}{4} : \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{2}{3}$;

б) $6\frac{4}{11} : 1\frac{7}{33} = \frac{70}{11} : \frac{40}{33} = \frac{70}{11} \cdot \frac{33}{40} = \frac{70 \cdot 33}{11 \cdot 40} = \frac{7 \cdot 3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$;

в) $3\frac{3}{4} : 5 = \frac{15}{4} : \frac{5}{1} = \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{15 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4}$.

Разумеется, правило деления дробей используют и при решении более сложных задач.

Пример 3. Выполним действия:

а) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{5} : \frac{14}{25} = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{14} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 25}{9 \cdot 5 \cdot 14} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$;

б) $\frac{7}{18} : \frac{13}{2} : \frac{14}{13} = \frac{7}{18} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{13}{14} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 13}{18 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{1}{18}$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot 1\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} : \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} : \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{2} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 9}{6 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2} + 5 = 5\frac{1}{2}$.

Пример 4. Собственная скорость катера равна 20 км/ч, скорость течения реки – $2\frac{1}{2}$ км/ч. За какое время катер проплывет 15 км по течению реки? Ответ приведите в минутах.

При движении по течению реки скорость катера возрастает и составляет $20 + 2\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$ (км/ч). Разделив расстояние на скорость, найдем время движения катера:

$$15 : 22\frac{1}{2} = 15 : \frac{45}{2} = \frac{15}{1} \cdot \frac{2}{45} = \frac{15 \cdot 2}{1 \cdot 45} = \frac{2}{3}\ (\text{ч}).$$

Переведем $\frac{2}{3}$ ч в минуты:

$$\frac{2}{3} \cdot 60 = \frac{2}{3} \cdot \frac{60}{1} = \frac{2 \cdot 60}{3 \cdot 1} = 2 \cdot 20 = 40\ (\text{мин}).$$

IV. Контрольные вопросы

1. Дробь, обратная данной.
2. Взаимно обратные дроби.
3. Правило деления дробей.
4. Запишите с помощью букв правило деления дробей.

V. Задание на уроках

№ 849 (а, б), 850 (в), 851 (а, б), 852 (а, в), 854 (а, б), 855 (б), 858 (а), 861 (а, в), 863 (а, б), 864 (а, в), 866, 869 (а), 870 (б), 872 (а, в), 874 (а), 876.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 849 (в, г), 850 (г), 851 (в, г), 852 (б, г), 854 (в, г), 855 (а), 858 (б), 861 (б, г), 863 (в, г), 864 (б, г), 867, 869 (б), 870 (а), 872 (б, г), 874 (б), 877.

9.6. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТИ ЦЕЛОГО И ЦЕЛОГО ПО ЕГО ЧАСТИ

Уроки 130–134. Связь между частью и целым

Цель: научиться решать практические задачи на части и целое.

Планируемые результаты: уметь находить части и целое.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Дробь, обратная данной.

2) Правило деления дробей.

3) Выполните действия:

а) $\frac{4}{7} : \frac{8}{21}$;

б) $1\frac{2}{5} : 3\frac{4}{15}$;

в) $\left(5\frac{1}{5} - 1\frac{4}{5}\right) : \left(2 - \frac{13}{15}\right)$.

4) Собственная скорость катера равна 25 км/ч, скорость течения реки — $2\frac{1}{2}$ км/ч. За какое время катер проплывет 30 км против течения реки?

Вариант 2

1) Взаимно обратные дроби.

2) Запишите правило деления дробей с помощью букв.

3) Выполните действия:

а) $\frac{8}{13} : \frac{4}{39}$;

б) $5\frac{5}{8} : 3\frac{3}{4}$;

в) $\left(6\frac{3}{7} - 4\frac{5}{7}\right) : \left(3 - 2\frac{25}{39}\right)$.

4) Собственная скорость катера равна 25 км/ч, скорость течения реки — $2\frac{1}{2}$ км/ч. За какое время катер проплывет 22 км по течению реки?

III. Работа по теме уроков

Во многих задачах необходимо находить определенную ***часть*** какой-то величины.

Пример 1. В пятых классах учится 45 учеников, $\frac{7}{9}$ из них приняли участие в туристическом походе (рис. 106). Сколько человек побывали в походе?

Рис. 106

В этой задаче целое – 45 учеников, надо найти $\frac{7}{9}$ этой величины.

Сначала найдем $\frac{1}{9}$ (девятую часть) от 45. Для этого разделим 45 на 9 и получим: $45 : 9 = 5$. Теперь найдем $\frac{7}{9}$ от 45. Поэтому умножим 5 на 7: $5 \cdot 7 = 35$. Таким образом, в поход ходило 35 пятиклассников.

Мы решили задачу, используя рассуждения, учитывая смысл дроби $\frac{7}{9}$. Легко понять, что в ходе решения мы фактически число 45 умножили на дробь $\frac{7}{9}$, т. е. $45 \cdot \frac{7}{9} = \frac{45}{1} \cdot \frac{7}{9} = \frac{45 \cdot 7}{1 \cdot 9} = 5 \cdot 7 = 35$.

Поэтому можно сформулировать ***правило***: чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, нужно это число умножить на данную дробь.

Пример 2. Туристы отправились на озеро, расстояние до которого 56 км. В первый день они прошли $\frac{3}{8}$ этого расстояния, во второй день – $\frac{5}{7}$ оставшегося расстояния. Сколько километров осталось до озера к третьему дню пути?

Найдем путь, который прошли туристы в первый день:

$56 \cdot \frac{3}{8} = \frac{56 \cdot 3}{1 \cdot 8} = 7 \cdot 3 = 21$ (км).

Поэтому осталось пройти $56 - 21 = 35$ (км). Найдем путь, пройденный во второй день:

$35 \cdot \frac{5}{7} = \frac{35 \cdot 5}{1 \cdot 7} = 5 \cdot 5 = 25$ (км).

Тогда до озера осталось пройти $35 - 25 = 10$ (км).

Очень часто возникает и ***обратная задача*** – по известной части какой-то величины найти всю величину.

Пример 3. В туристическом походе участвовало 35 пятиклассников, что составляет $\frac{7}{9}$ всех учащихся пятых классов (рис. 107). Сколько человек учится в пятых классах?

Теперь необходимо решить задачу, обратную примеру 1: известно $\frac{7}{9}$ некоторой величины и эта часть равна 35. Необходимо найти саму величину.

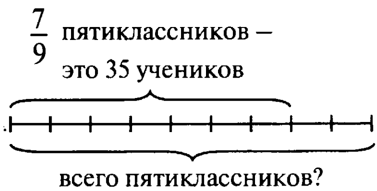


Рис. 107

Опять используем рассуждения. Так как 35 – это $\frac{7}{9}$ всех пятиклассников, то $\frac{1}{9}$ – это $35 : 7 = 5$. Все целое – $\frac{9}{9}$, и оно равно $5 \cdot 9 = 45$. Поэтому в школе 45 пятиклассников.

Фактически при решении задачи мы число 35 разделили на $\frac{7}{9}$, т. е. $35 : \frac{7}{9} = 35 \cdot \frac{9}{7} = \frac{35 \cdot 9}{1 \cdot 7} = 5 \cdot 9 = 45$.

Поэтому запомните ***правило***: чтобы найти число по его части, выраженной дробью, нужно разделить на эту дробь число, ей соответствующее.

Пример 4. Петя потратил $\frac{2}{3}$ имевшейся у него суммы денег, а потом еще 200 руб. В итоге он истратил $\frac{4}{5}$ суммы. Сколько денег было у Пети вначале?

Удобно использовать схематический рисунок 108.

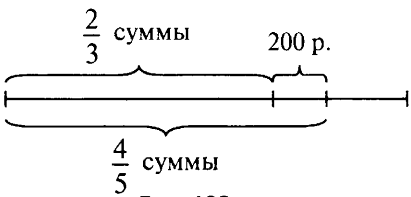


Рис. 108

Выясним, какую часть всей суммы составляют 200 руб. Из рисунка 108 видно, что эта часть равна $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{12 - 10}{15} = \frac{2}{15}$. Таким образом, $\frac{2}{15}$ всей суммы соответствует 200 руб. Теперь найдем, используя правило, всю сумму:

$$200 : \frac{2}{15} = \frac{200}{1} \cdot \frac{15}{2} = \frac{200 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 100 \cdot 15 = 1500 \text{ (руб.)}.$$

IV. Контрольные вопросы

1. Правило нахождения части целого.
2. Как найти целое по его части?

V. Задание на уроках

№ 883 (а), 884 (б), 885 (а), 886 (а), 887 (б), 888, 891 (а), 892 (б), 893 (а), 894 (б), 897.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 883 (б), 884 (а), 885 (б), 886 (б), 887 (а), 889, 891 (б), 892 (а), 893 (б), 894 (а), 896.

9.7. ЗАДАЧИ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ

Уроки 135–139. Совместные действия

Цель: рассмотреть задачи на совместную работу.

Планируемые результаты: уметь решать типовые задачи на совместные действия.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Правило нахождения части целого.

2) Туристы прошли 28 км, из них $\frac{3}{7}$ расстояния – в первый день. Сколько километров туристы прошли в первый день?

3) Мясокомбинат выпускает колбасу двух видов. Было произведено 36 т колбасы первого вида, что составляет $\frac{3}{8}$ всей продукции. Сколько тонн колбасы второго вида было выпущено?

4) Витя потратил $\frac{1}{4}$ имевшейся у него суммы денег, а потом еще 200 руб. В итоге он истратил $\frac{1}{3}$ суммы. Сколько денег было у Вити вначале?

Вариант 2

1) Правило нахождения целого по его части.

2) Туристы прошли 36 км, из них $\frac{4}{9}$ расстояния – в первый день. Сколько километров туристы прошли в первый день?

3) Мясокомбинат выпускает колбасу двух видов. Было произведено 35 т колбасы первого вида, что составляет $\frac{7}{11}$ всей продукции. Сколько тонн колбасы второго вида было выпущено?

4) Витя потратил $\frac{1}{5}$ имевшейся у него суммы денег, а потом еще 150 руб. В итоге он истратил $\frac{1}{4}$ суммы. Сколько денег было у Вити вначале?

III. Работа по теме уроков

Достаточно часто необходимо решать задачи, связанные с совместными действиями двух и более объектов: работой, движением, наполнением бассейна и т. д. Поэтому необходимо рассмотреть подход к решению таких задач.

Пример 1. Токарю и его ученику надо изготовить 600 деталей. Токарь может их сделать за 15 дней, ученик – за 30 дней. За сколько дней изготовят детали токарь и ученик, работая вместе?

Решение задачи достаточно очевидно. За один день токарь сделает 600 : 15 = 40 (дет.), ученик – 600 : 30 = 20 (дет.). Тогда за один день токарь и ученик вместе сделают 40 + 20 = 60 (дет.). Теперь найдем время, необходимое для выполнения всей работы: 600 : 60 = 10 (дней). Итак, токарь и ученик за 10 дней могут сделать все 600 деталей.

Интересно отметить, что ответ не зависит от количества деталей, которые необходимо изготовить. Если вместо 600 деталей возьмем 900 деталей, 1200 деталей, 1800 деталей и т. д., то получим тот же самый ответ – 10 дней. Поймем, почему так происходит. Для этого решим ту же самую задачу, учитывая части работы, выполняемые токарем и его учеников.

Пример 2. Токарю и его ученику надо изготовить некоторое количество деталей. Токарь может их сделать за 15 дней, ученик – за 30 дней. За сколько дней изготовят детали токарь и ученик, работая вместе?

Разумеется, задача решается аналогично предыдущей. За один день токарь сделать $\frac{1}{15}$ часть всей работы, ученик – $\frac{1}{30}$ часть работы. Вместе токарь и ученик за один день сделают $\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{2}{30}+\frac{1}{30}=$

$= \frac{2+1}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ часть всей работы. Тогда время, необходимое для выполнения всей работы, равно $1 : \frac{1}{10} = \frac{1}{1} \cdot \frac{10}{1} = 10$ (дней).

Подобным образом решаются многие задачи.

Пример 3. Мотоцикл проезжает расстояние между городами за 10 ч. Если из этих городов навстречу друг другу одновременно выезжают мотоцикл и машина, то они встречаются через 6 ч. За сколько часов машина проедет расстояние между городами?

Так как мотоцикл проезжает расстояние за 10 ч, то за один час он проедет $\frac{1}{10}$ этого расстояния. Мотоцикл и машина встречаются через 6 ч. Поэтому за 1 ч они сближаются на $\frac{1}{6}$ расстояния. Значит, за 1 ч машина проезжает $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{5-3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ расстояния. Тогда расстояние между городами машина проедет за $1 : \frac{1}{15} = 15$ ч.

Разумеется, в задаче могут рассматриваться три и более объектов.

Пример 4. Три насоса наполняют бассейн. Первый насос может заполнить бассейн за 2 ч, второй насос – за 3 ч и третий насос – за 4 ч. За какое время наполнят бассейн все три насоса, работая вместе?

Решим задачу таким же способом, как и примеры 2, 3. Первый насос за 1 ч наполняет $\frac{1}{2}$ часть бассейна, второй – $\frac{1}{3}$ часть и третий – $\frac{1}{4}$ часть. Все вместе за 1 час насосы заполняют $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$ часть бассейна. Тогда весь бассейн будет наполнен за $1 : \frac{13}{12} = \frac{12}{13}$ (ч).

Можно решить задачу и другим способом. Очевидно, что НОК (2; 3; 4) = 12. Рассмотрим промежуток времени, равный 12 ч. За это время первый насос может заполнить $12 : 2 = 6$ одинаковых бассейнов, второй – $12 : 3 = 4$ бассейна, третий $12 : 4 = 3$ бассейна. Поэтому за 12 ч можно наполнить $6 + 4 + 3 = 13$ одинаковых бассейнов. Тогда один бассейн будет заполнен за время $12 : 13 = \frac{12}{13}$ (ч).

Наконец, рассмотрим более трудную задачу.

Пример 5. Работают три насоса. При одновременной работе первого и второго насоса бак заполняется за 12 ч, второго и третьего – за 15 ч, первого и третьего – за 20 ч. За какое время наполнят бак все три насоса, работая вместе?

Используем тот же самый подход. За один час первый и второй насосы заполняют $\frac{1}{12}$ часть бака, второй и третий насосы – $\frac{1}{15}$ часть, первый и третий – $\frac{1}{20}$ часть. Посчитаем, какая часть бака будет наполнена за один час при такой работе насосов: $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{5}{60}+\frac{4}{60}+\frac{3}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$. Но при этом, например, второй насос участвовал в наполнении бака и с первым и с третьим насосами, т. е. его работа была учтена дважды. То же можно сказать и про первый и про третий насосы. Поэтому при работе трех насосов за один час будет заполнена $\frac{1}{5}:2=\frac{1}{10}$ часть бака и бак будет наполнен за $1:\frac{1}{10}=10$ (ч). Итак, при одновременной работе трех насосов бак будет заполнен за 10 ч.

IV. Задание на уроках

№ 902, 904 (а), 905 (б), 906, 907 (а), 908, 909 (б), 910 (а), 911, 913, 915 (а).

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 903, 904 (б), 905 (а), 907 (б), 909 (а), 910 (б), 912, 914, 915 (б).

Уроки 140, 141. Контрольная работа № 6 по теме «Действия с дробями»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип уроков: уроки развивающего контроля.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в четырех вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – несколько сложнее). Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (могут быть немного сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает учащимся некоторую возможность выбора. При таких же критериях оценки в случае решения вариантов 3, 4 дается дополнительно один балл (учитывая более высокую сложность вариантов). Поэтому в случае вариантов 3, 4 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или самим учащимся. Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\left(3\frac{4}{5} - 2\frac{3}{10}\right) : 1\frac{1}{2}$.

2. Выполните действия $2\frac{1}{10} + \frac{3}{17} \cdot 5\frac{1}{10}$.

3. Сначала Оля прочитала $\frac{2}{15}$ книги, затем еще $\frac{1}{3}$ книги. Какую часть книги ей осталось прочитать?

4. В олимпиаде участвовали 28 школьников, $\frac{4}{7}$ из них – девочки. Сколько мальчиков участвовало в олимпиаде?

5. В одном ящике $2\frac{2}{3}$ кг клубники, а в другом – в $1\frac{1}{2}$ раза больше. Сколько клубники в двух ящиках?

6. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого $1\frac{1}{3}$ м, а другая сторона длиннее ее на $\frac{1}{4}$ м.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\left(4\frac{2}{5} - 3\frac{1}{10}\right) \cdot 1\frac{3}{7}$.

2. Выполните действия $4\frac{3}{10} + 1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{7}$.

3. Сначала Оля прочитала $\frac{4}{15}$ книги, затем еще $\frac{3}{5}$ книги. Какую часть книги ей осталось прочитать?

4. В олимпиаде участвовали 36 школьников, $\frac{5}{9}$ из них – девочки. Сколько мальчиков участвовало в олимпиаде?

5. В одном ящике $3\frac{3}{4}$ кг клубники, а в другом – в $1\frac{1}{5}$ раза больше. Сколько клубники в двух ящиках?

6. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого $1\frac{2}{3}$ м, а другая сторона длиннее ее на $\frac{3}{4}$ м.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\cdot 1\frac{4}{5}$.

2. Выполните действия $\left(5\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\right):\left(1\frac{2}{3}+2\frac{1}{4}\right)$.

3. В первый день турист прошел $\frac{1}{4}$ всего маршрута, во второй – $\frac{3}{8}$ маршрута, в третий – оставшиеся 12 км. Какова длина маршрута?

4. Ширина прямоугольника 3 см, длина – 4 см. Ширину увеличили на $\frac{2}{5}$ см, а длину уменьшили на $\frac{1}{3}$ см. На сколько изменились периметр и площадь прямоугольника?

5. Подметьте закономерность при нахождении сумм дробей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, ... Найдите сумму дробей $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{128}$.

6. Представьте дробь $\frac{53}{60}$ в виде суммы трех различных дробей, у каждой из которых числитель равен 1.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $2-1\frac{4}{5}\cdot\left(1\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):6$.

2. Выполните действия $\left(2\frac{1}{3}+1\frac{3}{4}\right):\left(5\frac{2}{3}-2\frac{3}{4}\right)$.

3. В первый день турист прошел $\frac{2}{5}$ всего маршрута, во второй – $\frac{3}{10}$ маршрута, в третий – оставшиеся 15 км. Какова длина маршрута?

4. Ширина прямоугольника 3 см, длина – 4 см. Ширину уменьшили на $\frac{2}{5}$ см, а длину увеличили на $\frac{1}{3}$ см. На сколько изменились периметр и площадь прямоугольника?

5. Подметьте закономерность при нахождении сумм дробей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, ... Найдите сумму дробей $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{256}$.

6. Представьте дробь $\frac{49}{90}$ в виде суммы трех различных дробей, у каждой из которых числитель равен 1.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	3	2	3
2	4	5	2	2
...				
6	2	3	3	5

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Ответы ко всем задачам контрольной работы (можно вывесить на стенде).

V. Ответы к задачам контрольной работы

Вариант 1

1. $\frac{1}{3}$.
2. 3.
3. $\frac{8}{15}$.
4. 12 мальчиков.
5. $6\frac{2}{3}$ кг.
6. $4\frac{1}{6}$ м.

Вариант 2

1. 1.
2. 5.
3. $\frac{2}{15}$.
4. 16 мальчиков.
5. $8\frac{1}{4}$ кг.
6. $8\frac{1}{6}$ м.

Вариант 3

1. $2\frac{1}{5}$.
2. $\frac{19}{47}$.
3. 32 км.
4. Увеличились:
периметр на $\frac{8}{15}$ см,
площадь – на $1\frac{1}{5}$ см^2.
5. $\frac{127}{128}$.
6. $\frac{53}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{20}$.

Вариант 4

1. $1\frac{13}{20}$.
2. $1\frac{2}{5}$.
3. 50 км.
4. Уменьшились:
периметр на $\frac{1}{15}$ см,
площадь – на $2\frac{7}{15}$ см^2.
5. $\frac{255}{256}$.
6. $\frac{49}{90} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30} + \frac{1}{90}$.

Глава 10. МНОГОГРАННИКИ

Формируемые УУД: *предметные:* распознавать на чертежах, рисунках, в окружающем мире многогранники; изображать многогранники на клетчатой бумаге; рассматривать простейшие сечения пространственных фигур, получаемых путем предметного или компьютерного моделирования, определять их вид; изготавливать пространственные фигуры из разверсток, распознавать развертки куба, параллелепипеда, пирамиды; исследовать и описывать свойства многогранников, используя эксперимент, наблюдение, измерение, моделирование; вычислять объемы параллелепипедов, выражать одни единицы объема через другие; решать задачи на нахождение объемов параллелепипедов; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

10.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Уроки 142–144. Изображение геометрических тел

Цель: получить представление о геометрических телах.

Планируемые результаты: уметь различать геометрические тела и изображать их.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

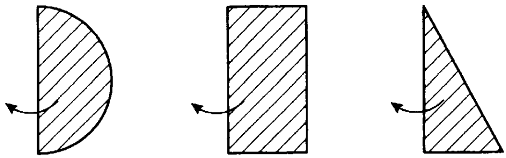
Хочется знать все обо всем и сразу. Но окружающий нас мир очень сложен. Поэтому при его изучении приходится выделять отдельные его стороны для исследования. Так появились отдельные области науки: биология, химия, физика, математика и т. д., которые изучают те или иные объекты природы, применяя общие для данной области науки методы, подходы, инструменты.

В свою очередь любая область науки также очень сложна и подразделяется на несколько направлений, причем все время возникают новые направления, происходит их объединение. Например, вы уже знаете, что в математику входит арифметика, алгебра, геометрия (на самом деле входит еще множество разделов).

Для удобства изучения геометрию разделяют на две большие части: ***планиметрию*** и ***стереометрию***. С планиметрией вы уже знакомы. Она изучает свойства фигур на плоскости. В основном рассматриваются круглое тело (окружность) и многоугольники (треугольник, четырехугольник и т. д.). Некоторые особенности этих фигур вы уже знаете, другие свойства будут изучаться позднее.

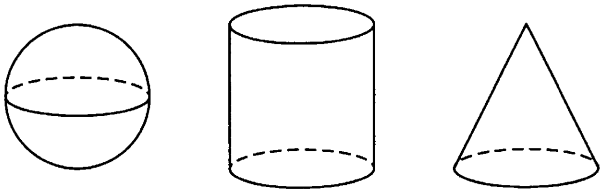
Стереометрия изучает свойства фигур, расположенных в пространстве. По аналогии с планиметрией такие фигуры разделяют на круглые тела (или тела вращения) и многогранники.

К телам вращения относятся шар, цилиндр и конус. Шар получается при вращении полуокружности (рис. 109, *а*) вокруг диаметра, цилиндр – при вращении прямоугольника (рис. 109, *б*) вокруг его стороны, конус – при вращении прямоугольного треугольника (рис. 109, *в*) вокруг стороны, образующей прямой угол. Внешний вид круглых тел представлен на рисунке 110, *а*, *б*, *в*.



а б в

Рис. 109



Шар Цилиндр Конус

а б в

Рис. 110

Заметим, что в планиметрии граница тела делит плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Аналогично и в стереометрии: поверхность каждого геометрического тела делит пространство на внутреннюю и внешнюю области. Поверхность шара имеет специальное название – ***сфера***. В геометрии невидимые линии принято изображать пунктиром.

Отметим, что приведенные на рисунке 110 изображения круглых тел (как и всех других, рассматриваемых далее) весьма условны. Понятно, что представить пространственную фигуру на плоском листе можно лишь схематично.

Вторая группа тел, изучаемых в стереометрии, – ***многогранники***. Многогранником называют фигуру, ограниченную плоскими многоугольниками. Каждый из этих многоугольников называют ***гранью*** многогранника. Вершины многоугольников являются также и ***вершинами*** многогранника, стороны многоугольников – ***ребрами*** многогранника. В геометрии рассматривают в основном два вида многогранников: призмы (рис. 111, *а*, *б*) и пирамиды (рис. 111 *в*, *г*).

Например, в призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 111, *а*) имеется пять граней – ABC, $A_1B_1C_1$, AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C, шесть вершин – A, A_1, B, B_1, C, C_1 и девять ребер – AB, A_1B_1, AC, A_1C_1, BC, B_1C_1, AA_1, BB_1, CC_1.

Отметим что в планиметрии у многоугольника количество вершин и количество сторон одинаково. В пространстве в многогранниках количество вершин, граней и ребер оказалось раз-

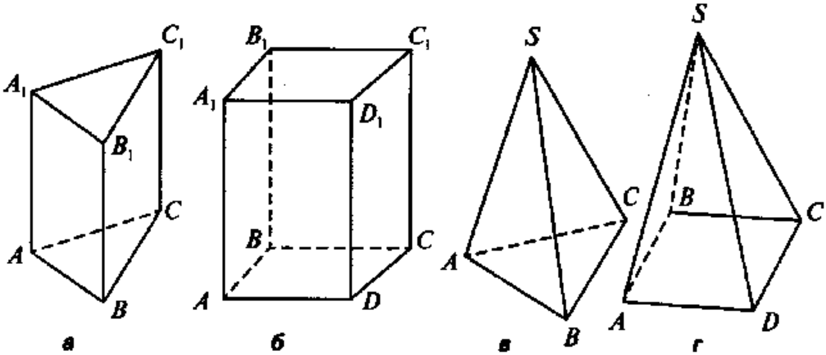


Рис. 111

личным. Тем не менее между этими величинами существует связь. Обозначим B – число вершин многогранника, $Г$ – число граней и P – число ребер. Для этих величин выполняется ***теорема Эйлера***: $B + Г - P = 2$. На рисунке 111, *а* имеем: $B = 6$, $Г = 5$, $P = 9$ и выполнено равенство $6 + 5 - 9 = 2$. Рекомендуем проверить теорему Эйлера для многогранников (рис. 111, *б–г*).

Заметим, что формулировка теоремы Эйлера очень простая. Однако ее доказательство не простое и привело к созданию нового раздела геометрии – топологии. ***Топология*** изучает такие свойства фигур, которые сохраняются при их деформации: растяжении, сжатии, изгибе.

Но все-таки вернемся к многогранникам: призмам и пирамидам. ***Призма*** имеет две равные грани, которые называют основаниями (рис. 111 *а*, *б*). Остальные грани (их называют боковыми гранями) являются прямоугольниками (не обязательно равными).

Одна из граней ***пирамиды*** (рис. 111 *в*, *г*) – произвольный многоугольник (его называют основанием). Остальные грани – треугольники, имеющие общую точку (ее называют вершиной пирамиды). Эти грани являются боковыми гранями пирамиды.

Заметим. что призмы и пирамиды называют по виду многоугольника, лежащего в основании. Например, пятиугольная призма (в основании лежит пятиугольник), шестиугольная пирамида (в основании расположен шестиугольник).

III. Контрольные вопросы

1. Перечислите виды тел вращения.
2. Виды многогранников.
3. Особенности призмы.
4. Пирамида и ее особенности.

IV. Задание на уроках

№ 920, 923, 926, 928, 930, 931.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 921, 922, 924, 927, 929, 932.

10.2. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Уроки 145, 146. Свойства параллелепипеда

Цель: рассмотреть параллелепипед и его свойства.

Планируемые результаты: знать основные свойства параллелепипеда.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Виды круглых тел. Сделайте рисунки.

2) Призма и ее особенности.

3) Нарисуйте треугольную пирамиду. Перечислите ее вершины, ребра и грани.

Вариант 2

1) Виды многогранников. Сделайте рисунки.

2) Пирамида и ее особенности.

3) Нарисуйте треугольную призму. Перечислите ее вершины, ребра и грани.

III. Работа по теме уроков

Наиболее простым и находящим применение в повседневной жизни многогранником является параллелепипед. Такую форму имеют кирпич, деревянный брус, книга и т. д.

Параллелепипедом называют призму, все грани которой прямоугольники. При этом противоположные грани параллелепипеда равны.

Параллелепипед имеет 8 вершин, 12 ребер и 6 граней. Легко проверить, что при этом выполняется теорема Эйлера.

Три ребра, выходящие из одной вершины, имеют специальные названия: длина, ширина и высота (измерения параллелепипеда) (рис. 112).

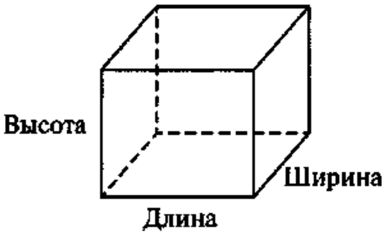
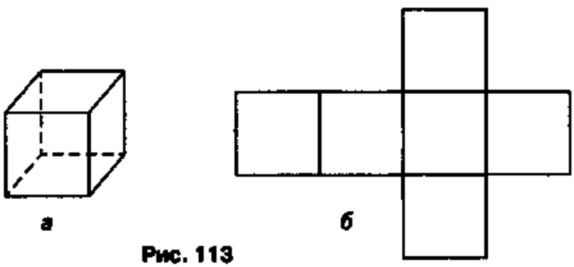


Рис. 112

Частным случаем параллелепипеда является ***куб***, все ребра которого равны и все грани – квадраты (рис. 113, *а*). Все три измерения куба равны между собой. Разрезав поверхность куба по некоторым ребрам, можно развернуть ее в плоскую фигуру, которую называют ***разверткой*** куба. Другими словами, ***развертка*** многогранника – это фигура, составленная из многоугольников, которые являются его гранями и расположены определенным образом (рис. 113, *б*).



а *б*

Рис. 113

Оказывается, что куб имеет 11 различных разверток.

IV. Контрольные вопросы

1. Параллелепипед и его основные свойства.
2. Куб. Развертка куба.

V. Задание на уроках

№ 937, 939, 941, 945, 947, 949, 950, 953, 954 (а, б), 955, 957.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 938, 940, 942, 943, 944, 946, 948, 951, 952, 954 (в, г), 956.

10.3. ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Уроки 147–149. Вычисление объема параллелепипеда

Цель: получить представление об объеме тела.

Планируемые результаты: уметь вычислять объем параллелепипеда.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Параллелепипед и его свойства.

2) Нарисуйте какую-нибудь развертку куба.

3) Параллелепипед имеет длину 6 см, ширину – 3 см и высоту – 2 см. Найдите площадь поверхности этого тела.

Вариант 2

1) Куб и его свойства.

2) Нарисуйте какую-нибудь развертку куба.

3) Параллелепипед имеет длину 7 см, ширину – 4 см и высоту – 3 см. Найдите площадь поверхности этого тела.

III. Работа по теме уроков

В планиметрии мерой части плоскости, которую занимает геометрическая фигура, являлась ***площадь***. Аналогично в стереометрии мерой части пространства, которую занимает геометрическое тело, является ***объем***. Объем тела определяется формой тела и его размерами.

Понятие объема возникло в глубокой древности в связи с необходимостью измерения количества жидкостей и сыпучих веществ. Для этого использовались сосуды определенной вместимости (объема). Так, в Англии система мер имеет вид: 1 пинта $\approx \frac{1}{2}$ л, 1 кварта = 2 пинты, 1 галлон = 8 пинтам. В России в XIX в. система мер жидкости имела вид: 1 штоф $\approx 1\frac{1}{5}$ л, 1 четверть = $2\frac{1}{2}$ штофа, 1 ведро = 4 четверти, 1 бочка = 40 ведер.

Можно измерять объемы тел, заполняя их какой-то жидкостью, а затем мерить объем этой жидкости. Но, разумеется, это неудобно. Хотелось бы научиться вычислять объем геометрического тела.

Прежде всего надо иметь единицу объема. В качестве единицы объема можно выбрать объем куба с ребром 1 см. Такую единицу называют один кубический сантиметр (1 см^3). Можно выбрать объем куба с ребром 1 м – один кубический метр (1 м^3) и т. д.

Вычислим объем параллелепипеда с длиной 4 см, шириной 3 см и высотой 2 см. Заполним такой параллелепипед кубиками с ребром 1 см (рис. 114). На основание выложим $4 \cdot 3 = 12$ кубиков. Так как высота параллелепипеда 2 см, то потребуется еще один такой же слой. Следовательно, чтобы заполнить весь параллелепипед, потребуется $12 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ кубика. Тогда объем этого параллелепипеда 24 см^3.

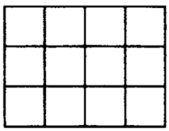


Рис. 114

Таким образом, мы получили ***правило*** вычисления объема параллелепипеда. Объем параллелепипеда равен произведению трех его измерений: длины, ширины и высоты.

Пример 1. Найдем объем:

а) параллелепипеда с длиной 7 см, шириной 5 см и высотой 4 см. Очевидно, его объем равен произведению всех его измерений, т. е. $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ см^3;

б) куба с ребром 4 см. Его объем составляет $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ см^3.

Пример 2. Параллелепипед имеет объем 240 см^3. Каждое его измерение уменьшили в 2 раза. Найдите объем нового параллелепипеда.

Очевидно, если какое-то измерение параллелепипеда (например, длину) изменить в какое-то количество раз, то в такое же количество раз меняется его объем. Поэтому при уменьшении длины параллелепипеда в 2 раза объем также уменьшается в 2 раза. Так как в нашем случае уменьшаются в 2 раза все три измерения, то объем параллелепипеда уменьшится в $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ раз и будет равен $240 : 8 = 30$ см^3.

Укажем связь между единицами объема:

1 м^3 = 1000 дм^3 = 10^3 дм^3,

1 дм^3 = 1000 см^3 = 10^3 см^3,

$1 \text{ см}^3 = 1000 \text{ мм}^3 = 10^3 \text{ мм}^3$,
$1 \text{ км}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ м}^3 = 10^9 \text{ м}^3$.

Заметим, что единица объема, равная одному кубическому дециметру (1 дм^3), носит и другое название – ***литр***. В литрах меряют объемы жидкостей (иногда и сыпучих тел). Например, 2-литровый пакет сока, 300-литровая бочка нефти и т. д.

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие объема тела.
2. Единицы измерения объема.
3. Правило вычисления объема параллелепипеда.
4. Связь между единицами объема.

V. Задание на уроках

№ 962, 965, 966 (1), 967 (а), 969 (а–г), 970, 973, 975 (а), 976, 977.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 963, 964 (а), 966 (2), 967 (б), 969 (д–з), 971, 972, 974, 975 (б, в), 978, 979.

10.4. ПИРАМИДА

Уроки 150, 151. Свойства пирамиды

Цель: рассмотреть еще один многогранник – пирамиду.

Планируемые результаты: знать основные свойства пирамиды.

Тип уроков: уроки открытия нового знания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Найдите объем параллелепипеда с длиной 8 см, шириной – 4 см и высотой – 3 см.

2) Объем параллелепипеда равен 360 см^3. Его длину увеличили в 4 раза, ширину – в 3 раза, а высоту уменьшили в 2 раза. Найдите объем нового параллелепипеда.

3) Бочка вмещает 250 л воды. Выразите объем бочки в метрах кубических ($м^3$).

Вариант 2

1) Найдите объем параллелепипеда с длиной 6 см, шириной – 7 см и высотой – 2 см.

2) Объем параллелепипеда равен 420 $см^3$. Его длину увеличили в 5 раз, ширину – в 2 раза, а высоту уменьшили в 3 раза. Найдите объем нового параллелепипеда.

3) Бочка вмещает 400 л воды. Выразите объем бочки в метрах кубических ($м^3$).

III. Работа по теме уроков

Рассмотрим еще один вид многогранников – ***пирамиды***. Пирамида – геометрическое тело, ограниченное произвольным многоугольником и несколькими треугольниками. Этот многоугольник называют ***основанием*** пирамиды, треугольники – ее ***боковыми гранями***. Все боковые грани пирамиды сходятся в одной точке, которую называют ***вершиной*** пирамиды.

В основании пирамиды может лежать многоугольник с любым числом сторон. Пирамиду называют по числу сторон ее основания: треугольная (рис. 115, *а*), четырехугольная (рис. 115, *б*), пятиугольная (рис. 115, *в*) и т. д.

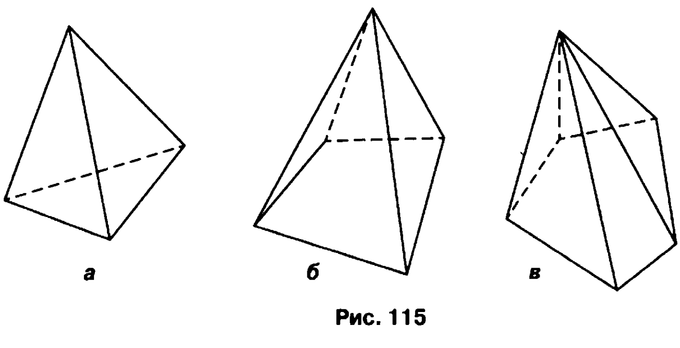


Рис. 115

Простейшей пирамидой является ***треугольная*** пирамида. Все ее грани представляют собой треугольники. Поэтому любую грань можно считать основанием пирамиды. Треугольная пирамида имеет четыре вершины, шесть ребер и четыре грани. Ни один многогранник (в частности, пирамида) не может иметь меньшего числа вершин, ребер и граней, чем у треугольной пирамиды.

Разумеется, как и для любого многогранника, можно получить развертку. Например, на рисунке 116 приведена развертка треугольной пирамиды.

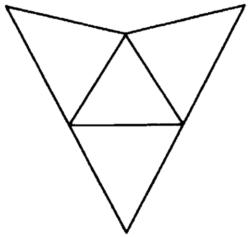


Рис. 116

В заключение напомним, что самая знаменитая пирамида – пирамида Хеопса – до сих пор поражает своими размерами.

IV. Контрольные вопросы

1. Пирамида, ее особенности.
2. Свойства треугольной пирамиды.
3. Развертка пирамиды.

V. Задание на уроках

№ 986, 987 (1), 988, 991, 993, 994 (1), 995 (1, 3, 4).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 985, 987 (2), 989, 990, 992, 994 (2), 995 (2, 5, 6).

Глава 11. ТАБЛИЦЫ И ДИАГРАММЫ

Формируемые УУД: *предметные:* анализировать готовые таблицы и диаграммы; сравнивать между собой данные, характеризующие некоторое явление или процесс; выполнять сбор информации в несложных случаях; заполнять простые таблицы, следуя инструкции; *метапредметные:* самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы; адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, ее объективную трудность и собственные возможности ее решения; устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы; создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение; формировать учебную и общепользовательскую компетентность в области использования информационно-коммуникационных технологий; иметь первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники; видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации; понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации; выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки; понимать сущность алгоритмических предписаний и действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем; планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера; *личностные:* формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию; формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности; умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; иметь первоначальные представления о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации; формирование критичности мышления, умения распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; формирование креативности мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач; умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; формирование способности к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

11.1. ЧТЕНИЕ И СОСТАВЛЕНИЕ ТАБЛИЦ

Уроки 152–154. Работа с таблицами

Цель: дать представление о статистике.

Планируемые результаты: уметь читать и составлять таблицы.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Мы живем в мире информации. Одно из существенных отличий человека от животного – речь, которая позволяет людям обмениваться информацией. В древности объем информации был крайне незначительный, по мере становления человечества этот объем возрос во много раз. Естественно, возникла необходимость в сборе, упорядочивании, осмыслении (анализе) и наглядном представлении информации. Именно такими вопросами занимается ***статистика***.

При этом необходимо учитывать, что статистика рассматривает ***массовые*** явления: показатели эффективности экономики в целом и отдельных ее отраслей, характеристики работы банковской системы, социальные опросы нескольких тысяч человек, перепись многомиллионного населения и т. д. Массовость изучаемых явлений и огромный объем информации требует принципиально новых подходов и методик, начиная от обоснованного отбора группы опрашиваемых людей и кончая наглядным представлением собранной и обработанной информации.

Таким образом, в настоящее время статистика является сложнейшей, очень разветвленной, чрезвычайно социально важной наукой, использующей самые различные методики, в том числе и многие разделы математики. В силу сложности этой науки ее выводы далеко не однозначны. Например, рейтинги политиков, представленные разными агентствами, существенно отличаются.

В этой главе вам предстоит первичное знакомство с некоторыми элементами статистики. Будут рассмотрены способы представления информации (таблицы и диаграммы) и получения информации (опрос общественного мнения).

С таблицами вы знакомы давно (практически с первого класса). Простейшими таблицами являются дневник и школьный журнал. В дневнике отражена ваша личная информация об успеваемости по разным предметам, в журнале – информация об успеваемости учеников всего класса, количестве пропущенных уроков, числе опозданий и т. д.

В таблице может отражаться информация или об одном факторе (таблица 1) или о нескольких факторах (таблица 2). Например, в таблице 1 приведены оценки учащихся за последнюю контрольную работу по математике. Из приведенного фрагмента таблицы видно, что один школьник написал работу на «отлично», два – на «хорошо», два – на «удовлетворительно» и один – на «неудовлетворительно». Используя таблицу, можно, например, найти среднюю успеваемость класса – оценка «$3\frac{1}{2}$».

Таблица 1

№ п/п	Список учащихся	Оценка
1	Архипов Михаил	3
2	Борисова Ольга	4
3	Власова Мария	5
4	Володин Виктор	3
5	Гуров Алексей	2
6	Денисова Дарья	4

Во многих случаях в таблице необходимо отразить несколько факторов. В таблице 2 приведены результаты социологического опроса учащихся. Школьный психолог задавал следующие вопросы: 1 – состав семьи (человек), 2 – время на дорогу в школу (в минутах), 3 – время на подготовку домашнего задания (в часах), 4 – время на досуг (в часах), 5 – участие в школьных кружках и факультативах (количество), 6 – средняя успеваемость в школе (оценка). Из таблицы видно, что Борисова Ольга тратит на дорогу

Таблица 2

№ п/п	Список учащихся	1	2	3	4	5	6
1	Архипов Михаил	3	15	2	3	2	3
2	Борисова Ольга	4	10	3	4	3	4
3	Власова Мария	2	12	4	3	2	5
4	Володин Виктор	3	18	2	3	1	4
5	Гуров Алексей	3	25	1	5	0	3
6	Денисова Дарья	5	16	3	4	1	4

меньше всего времени, а Гуров Алексей – на досуг (что, по-видимому, отражается на успеваемости). В кружках участвуют почти все школьники, при этом посещают, в основном, 1–2 кружка. Также в таблице содержится еше много информации, полезной школьному психологу.

Часто приходится не только использовать готовые таблицы, но и составлять их самим. При этом надо уметь быстро фиксировать данные и суммировать их. Для этого можно использовать условные обозначения в виде отрезков и дуг. Например, авторы пользуются следующими обозначениями:

 – 1 предмет,

 – 2 предмета,

 – 4 предмета,

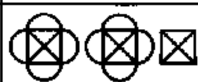
 – 6 предметов,

 – 8 предметов,

 – 10 предметов.

Например, для оценки рыбного поголовья пруда была вытащена сеть с уловом (который затем был отпущен), по видам пересчитана рыба и составлена таблица 3.

Таблица 3

Вид рыбы	Подсчет рыб по видам	Число рыб
Лещ		5
Пескарь		17
Щука		3
Карась		26
Карп		19
	Всего	70

Из таблицы видно, что пруд населен в основном пескарями, карасями и карпами. Чаще всего встречаются караси, реже – щуки. Также попадаются и лещи.

III. Контрольные вопросы

1. Что изучает статистика?
2. Особенности статистики как науки.

IV. Задание на уроках

№ 1001, 1003, 1005, 1007, 1008.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1000, 1002, 1004, 1006, 1009, 1010.

11.2. ДИАГРАММЫ

Уроки 155–157. Построение диаграмм

Цель: ознакомиться с представлением информации с помощью диаграмм.

Планируемые результаты: уметь строить простейшие диаграммы.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

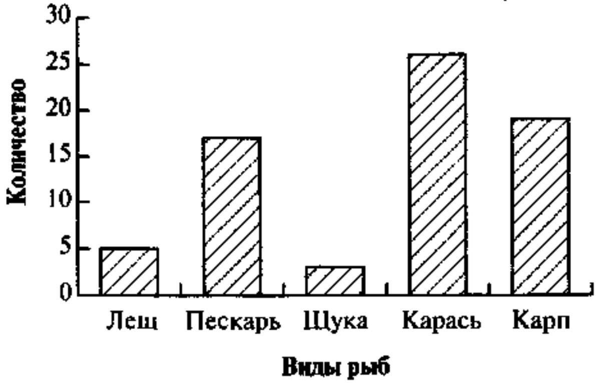
II. Работа по теме уроков

Ранее мы рассмотрели представление информации в виде таблицы. Но такое представление не очень наглядно. Поэтому удобно использовать ***графические подходы***, в частности диаграммы.

Например, представим в виде ***столбчатой диаграммы*** рыбное поголовье пруда (таблица 3 предыдущего урока). Для этого построим прямой угол. На его горизонтальной стороне укажем виды рыб, на вертикальной стороне – число рыб данного вида (предварительно выбрав единицу измерения). Построим пять столбиков определенной высоты. Высота первого столбика равна 5, второго столбика – 17 и т. д.

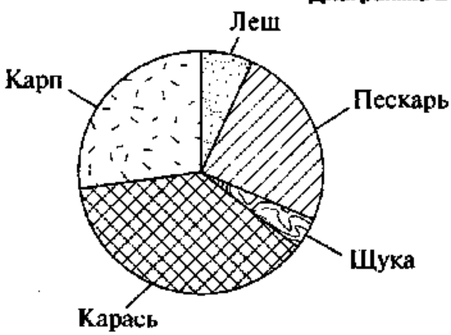
При построении столбчатых диаграмм есть определенные условности. Можно выбрать любую ширину столбиков и расстояние между ними. Но все столбики должны иметь одинаковую ширину и быть расположенными на равном расстоянии друг от друга. Это расстояние может равняться нулю, т. е. столбики будут следовать друг за другом без промежутков.

Диаграмма 1



Часто используются и ***круговые диаграммы***. В этом случае для отображения информации используются секторы круга. Углы секторов связаны со значением отображаемой величины: чем больше это значение, тем больше угол. Однако сумма углов всех секторов должна равняться 360°.

Диаграмма 2



Заметим, что в случаях столбчатых и круговых диаграмм столбики и секторы можно закрашивать (штриховать), можно и не закрашивать.

III. Контрольные вопросы

1. Построение столбчатой диаграммы.
2. Круговая диаграмма.

IV. Задание на уроках

№ 1015, 1017.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1014, 1016.

11.3. ОПРОС ОБЩЕСТВЕННОГО МНЕНИЯ

Уроки 158, 159. Сбор информации

Цель: получить представление об опросе общественного мнения.

Планируемые результаты: уметь использовать опросы для получения информации.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

На предыдущих уроках мы рассмотрели различные способы представления информации. Но сначала эту информацию надо получить. Для этого существуют различные методики: беседа, анализ данных СМИ, исследование анкет и т. д. Одним из наиболее распространенных и массовых является ***социологический опрос*** (опрос общественного мнения) по самым разным вопросам: о строительстве станции метро, открытии факультатива в школе, коллективном походе в театр, проведении праздничного концерта и т. п.

Разумеется, для проведения опроса общественного мнения требуется определенная подготовка: отбор группы опрашиваемых, подбор вопросов, обработка полученных ответов, представление результатов опроса.

Для пятиклассников школы во время каникул планируется экскурсия в один из городов Золотого кольца России. Туристическое агентство предложило шесть городов: Кострома, Ярославль, Ростов, Суздаль, Владимир, Углич. С учетом стоимости, дальности и времени поездки родители и дети выбрали один из городов. В таблице 4 приведены результаты такого мини-опроса.

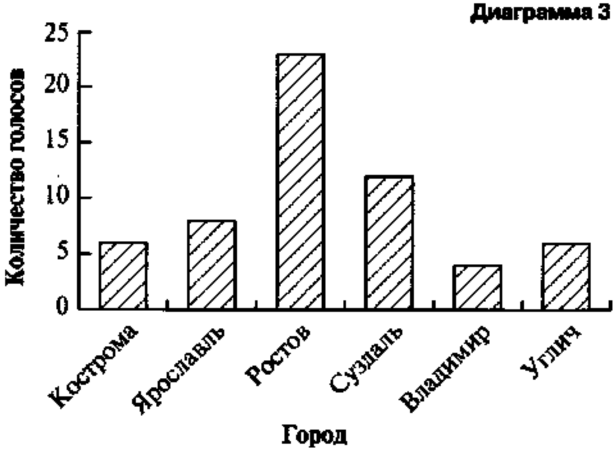
Таблица 4

№ п/п	Город	Подсчет голосов	Число голосов
1	Кострома		6
2	Ярославль		8

№ п/п	Город	Подсчет голосов	Число голосов
3	Ростов		23
4	Суздаль		12
5	Владимир		4
6	Углич		6

Из таблицы видно, что наиболее популярным оказался Ростов – один из древнейших городов России (основан в 862 г., более трехсот памятников культуры). Для большей наглядности результатов опроса на рисунке представлена столбчатая диаграмма.

Диаграмма 3



III. Контрольные вопросы

1. Способы получения информации.
2. Опрос общественного мнения.

IV. Задание на уроках

№ 1021, 1023, 1026 (а), 1027 (б), 1028.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1022, 1024, 1025, 1026 (б), 1027 (а), 1029.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА 5 КЛАССА

(В заключение необходимо повторить курс 5 класса. Для повторения выбраны базовые темы курса.)

Урок 160. Действия с натуральными числами

Цель: повторить действия с натуральными числами.

Планируемые результаты: отработать навыки вычислений.

Тип урока: урок рефлексии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Числа, которые используют для счета предметов, называют ***натуральными***: 1, 2, 3, ... Числа, записанные по порядку одно за другим, образуют ***натуральный ряд***: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Из двух натуральных чисел меньшим считают то число, которое в натуральном ряду стоит раньше, и большим – то, которое стоит позже. На координатной прямой меньшему числу соответствует точка, расположенная левее, большему числу – расположенная правее.

Порядок действий в вычислениях.

1. Если в выражении нет скобок и оно содержит только действия сложения и вычитания или только действия умножения и деления, то их выполняют слева направо в том порядке, в котором они записаны.

2. Если в выражении нет скобок, то сначала выполняют действия умножения, деления и возведения в степень, а потом сложения и вычитания.

3. Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют действия в скобках (с учетом правил 1 и 2).

III. Задание на уроке

№ 68 (а, б), 90 (а, г), 92 (б), 160 (а, в), 180 (а), 229 (а, б), 230, 240, 267 (а, б), 270 (а).

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 68 (в, г), 90 (б, д), 92 (в), 160 (б, г), 180 (б), 229 (в, г), 231, 241, 267 (в, г), 270 (б).

Уроки 161, 162. Делимость чисел

Цель: повторить понятия, связанные с делимостью чисел.

Планируемые результаты: отработать решение задач.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Число a делится на число b, если существует число c такое, что выполняется равенство $a = b \cdot c$. При этом говорят, что b – делитель a или a – кратное b.

Если число a делится и на число b и на число c, то a является ***общим кратным*** чисел b и c. Наименьшее из этих общих кратных называют ***наименьшим общим кратным***.

Натуральное число называют ***простым***, если оно имеет только два делителя: 1 и самого себя. Натуральное число, имеющее более двух делителей, называют ***составным*** числом. При этом число 1 не является ни простым, ни составным числом. Любое натуральное число (кроме 1) или является простым, или может быть разложено на простые множители.

Если числа a и b делятся на число c, то c является ***общим делителем*** чисел a и b. Наибольший из этих общих делителей называют ***наибольшим общим делителем***.

Признаки делимости чисел

1. Если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10.
2. Если число оканчивается цифрой 0 или цифрой 5, то оно делится на 5.
3. Если число оканчивается четной цифрой, то оно делится на 2.
4. Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.
5. Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.

Деление с остатком записывается в виде: делимое = делитель · неполное частное + остаток. При этом должно выполняться неравенство 0 ≤ остаток < делитель. При делении числа на натуральное число n возможны ровно n остатков: $0, 1, 2, ..., n - 1$.

III. Задание на уроках

№ 422, 429 (а), 435 (а, б), 439, 455, 474, 485 (а, б), 489, 510, 513.

IV. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 423, 429 (б), 435 (в, г), 456, 475, 485 (в, г), 491, 511, 514.

Уроки 163, 164. Действия с дробями

Цель: повторить действия с дробями.

Планируемые результаты: уметь вычислять значение выражений с дробями.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Запись $\frac{a}{b}$ называют ***дробью***. Число внизу b (под чертой) показывает, на сколько равных частей был разделен предмет. Это число b называют ***знаменателем*** дроби. Число вверху a (над чертой) показывает, сколько таких частей было выбрано. При этом число a называют ***числителем*** дроби. Дробь называют ***правильной***, если ее числитель меньше знаменателя, т. е. $a < b$. Дробь называют ***неправильной***, если ее числитель не меньше знаменателя, т. е. $a \geq b$.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится дробь, равная данной, т. е. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ (где $c \neq 0$). Чтобы сократить дробь, ее числитель и знаменатель нужно разделить на их общий делитель. При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями их приводят к наименьшему общему знаменателю.

III. Задание на уроках

№ 668 (а, б), 673 (а), 696, 715, 721 (а, б), 755 (в, г) 763 (а), 779 (б), 780 (а), 795 (а–в), 806, 833 (а, б), 862, 869 (а), 870 (б).

IV. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 668 (в, г), 673 (б), 697, 716, 721 (в, г), 755 (а, б), 763 (б), 779 (а), 780 (б), 795 (г–е), 807, 834 (а, б), 863, 869 (б), 870 (а).

Уроки 165, 166. Текстовые задачи

Цель: повторить решение задач с текстовым содержанием.

Планируемые результаты: отработать решение типичных задач.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

На протяжении этого года школьники решали множество задач с текстовым содержанием. Напомним основные типы таких задач.

Задачи на движение

При движении двух тел важной характеристикой является ***скорость сближения*** тел, т. е. изменение расстояния между телами за единицу времени (например, за 1 час). Она определяется направлением движения тел (в одном направлении или в противоположных направлениях).

Частный случай движения тел – ***движение по реке***. При движении тела по течению реки его скорость равна сумме собственной скорости тела и скорости течения реки. При движении тела против течения реки его скорость равна разности собственной скорости тела и скорости течения реки.

Задачи на части

Как правило, такие задачи возникают при рассмотрении различных смесей веществ. В этом случае содержание веществ измеряется в частях и из условия задачи определяется вес такой части. Потом находится вес смешиваемых веществ.

Задачи на уравнивание

В задачах этого типа сравнивают размер, вес или другие характеристики двух (или более) тел. Эффективный способ решения подобных задач – уравнивание характеристик этих тел путем добавления или убирания разницы в характеристиках. После этого находят характеристики сначала одного, а затем и другого тела.

Задачи на связь между целым и его частью

При решении таких задач надо помнить два правила.

1. Чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, нужно это число умножить на данную дробь.

2. Чтобы найти число по его части, выраженной дробью, нужно разделить на эту дробь число, ей соответствующее.

Задачи на совместную работу

Это тип задач, тесно связанный с предыдущим видом. При решении таких задач всю работу принимают за единицу. Подсчитывают часть работы, которую выполняет каждый объект за единицу времени (например, за 1 час). Вычисляют часть работы, которую делают все объекты вместе за единицу времени. Наконец, определяют время, за которое будет выполнена работа при совместном действии всех объектов.

III. Задание на уроках

№ 285 (а), 287, 289 (б), 295, 302 (а), 342 (а), 345 (б), 348 (а), 350 (б), 353 (а), 360 (б), 363 (а), 367 (б), 883 (а), 891 (б), 904 (а).

IV. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 285 (б), 288, 289 (а), 294, 302 (б), 342 (б), 345 (а), 348 (б), 350 (а), 353 (б), 360 (а), 363 (б), 367 (а), 883 (б), 891 (а), 904 (б).

Уроки 167, 168. Элементы геометрии

Цель: повторить основные сведения из геометрии.

Планируемые результаты: уметь решать типовые задачи.

Тип уроков: уроки рефлексии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Два луча, имеющие общее начало, образуют ***угол***. Луч, который делит угол на два равных, называют ***биссектрисой*** угла. Величины углов измеряют в градусах. При этом развернутый угол равен 180°, а прямой угол равен 90°.

Фигуру, ограниченную замкнутой не самопересекающейся линией, называют ***многоугольником***. Любой многоугольник имеет одинаковое число вершин, сторон и углов. ***Периметр*** многоугольника равен сумме длин всех его сторон.

Треугольники в зависимости от соотношения между сторонами делятся на: ***равнобедренный*** (длины двух сторон равны), ***равносторонний*** (длины всех сторон равны) и ***произвольный***. В зависимости от соотношения между углами треугольники делятся на: ***прямоугольный*** (один из углов прямой), ***тупоугольный*** (один из углов тупой) и ***остроугольный*** (все углы острые).

Прямоугольник – четырехугольник, все углы которого прямые. Диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам. ***Площадь*** прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон.

Геометрические тела в пространстве разделяются на ***круглые*** тела (шар, цилиндр и конус) и на ***многогранники*** (призма и пирамида).

Поверхность многогранника состоит из многоугольников, которые называют ***гранями*** многогранника. Вершины многоугольников являются также ***вершинами*** многогранника, стороны многоугольников – ***ребрами*** многогранника.

Параллелепипед – многогранник, все грани которого являются прямоугольниками. ***Объем*** параллелепипеда равен произведению трех его измерений: длины, ширины и высоты.

Пирамида – многогранник, одна грань которого является произвольным многоугольником, а все остальные грани – треугольниками, сходящимися в одной вершине.

III. Задание на уроках

№ 378 (1), 380 (а), 396, 407 (а), 524 (а, б), 527, 542, 573, 575, 590, 594, 920, 929 (1, 2), 962, 973, 987 (1), 988 (б), 995 (1–3).

IV. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 378 (2), 380 (б, г), 397, 407 (б), 408, 524 (в, г), 528, 543, 574, 576, 921, 929 (3, 4), 941, 963, 974, 987 (2), 988 (в), 995 (4–6).

Уроки 169, 170. Контрольная работа № 7 по теме «Повторение материала курса»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип уроков: уроки развивающего контроля.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в четырех вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – несколько сложнее). Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (могут быть немного сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает учащимся некоторую возможность выбора. При таких же критериях оценки в случае решения вариантов 3, 4 дается дополнительно один балл (учитывая более высокую сложность вариантов). Поэтому в случае вариантов 3, 4 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или самим учащимся. Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Из натуральных чисел от 1 до 100 выпишите те, которые без остатка делятся на 3, 6 и 8.

2. Докажите, что значение выражения $10^{15} + 8$ без остатка делится на 6.

3. Сравните значения произведений дробей $a = \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{29}{37}$ и $b = \frac{11}{37} \cdot \frac{29}{5} \cdot \frac{2}{19}$, не выполняя вычислений.

4. Длины сторон треугольника относятся как 2 : 3 : 4, его периметр равен 72 см. Найдите длины сторон треугольника.

5. Собственная скорость катера равна 15 км/ч, скорость течения реки – 3 км/ч. Катер проплыл 36 км по течению реки и 48 км – против течения. Какое время было затрачено на плавание?

6. Одна труба наполняет бак за 4 ч, вторая – за 12 ч. За какое время наполнят бак две трубы?

Вариант 2

1. Из натуральных чисел от 1 до 100 выпишите те, которые без остатка делятся на 4, 7 и 14.

2. Докажите, что значение выражения $10^{14} + 2$ без остатка делится на 6.

3. Сравните значения произведений дробей $a = \frac{2}{7} \cdot \frac{11}{17} \cdot \frac{23}{37}$ и $b = \frac{11}{37} \cdot \frac{23}{7} \cdot \frac{2}{17}$, не выполняя вычислений.

4. Длины сторон треугольника относятся как 3 : 4 : 5, его периметр равен 84 см. Найдите длины сторон треугольника.

5. Собственная скорость катера равна 16 км/ч, скорость течения реки – 4 км/ч. Катер проплыл 60 км по течению реки и 36 км – против течения. Какое время было затрачено на плавание?

6. Одна труба наполняет бак за 6 ч, вторая – за 12 ч. За какое время наполнят бак две трубы?

Вариант 3

1. Найдите двузначное натуральное число, которое при делении на 3 и на 23 дает остаток 2.

2. Докажите, что значение выражения $736^{12} + 321^{17} - 2$ без остатка делится на 5.

3. Сравните значения выражений

$a = \left(3\frac{5}{9} - \frac{7}{9}\right) \cdot \frac{9}{25}$ и $b = \left(\frac{3}{5} + \frac{29}{10}\right) : 3\frac{1}{2}$.

4. Найдите площадь поверхности и объем параллелепипеда, длина которого равна 8 см, ширина – 6 см и высота – 3 см.

5. Из города выезжает поезд со скоростью 50 км/ч. Через 2 ч в том же направлении выезжает другой поезд со скоростью 60 км/ч. Через какое время и на каком расстоянии от города они встретятся?

6. Одна труба наполняет бак за 3 ч, вторая – за 4 ч и третья – за 6 ч. За какое время наполнят бак три трубы?

Вариант 4

1. Найдите двузначное натуральное число, которое при делении на 7 и на 13 дает остаток 3.

2. Докажите, что значение выражения $571^{15} + 256^{12} + 3$ без остатка делится на 10.

3. Сравните значения выражений

$$a = \left(10\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{29} \text{ и } b = \left(\frac{4}{5} + \frac{37}{10}\right) : 4\frac{1}{2}.$$

4. Найдите площадь поверхности и объем параллелепипеда, длина которого равна 7 см, ширина – 5 см и высота – 4 см.

5. Из города выезжает поезд со скоростью 45 км/ч. Через 3 ч в том же направлении выезжает другой поезд со скоростью 60 км/ч. Через какое время и на каком расстоянии от города они встретятся?

6. Одна труба наполняет бак за 4 ч, вторая – за 6 ч и третья – за 8 ч. За какое время наполнят бак три трубы?

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	3	2	3
2	4	5	2	2
...				
6	2	3	3	5

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;
± – число решивших задачу со значительными погрешностями;
– – число не решивших задачу;
∅ – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Ответы ко всем задачам контрольной работы (можно вывесить на стенде).

V. Ответы к задачам контрольной работы

Вариант 1

1. 24, 48, 72, 96.
2. Доказано (определите цифры числа).
3. $a = b$.
4. 16 см, 24 см, 32 см.
5. 6 ч.
6. 3 ч.

Вариант 2

1. 28, 56, 72.
2. Доказано (определите цифры числа).
3. $a = b$.
4. 21 см, 28 см, 35 см.
5. 6 ч.
6. 4 ч.

Вариант 3

1. 71.
2. Доказано (определите последнюю цифру числа).
3. $a = b$.
4. 180 см^2, 144 см^3.
5. 10 ч, 600 км.
6. 1 ч 20 мин.

Вариант 4

1. 94.
2. Доказано (определите последнюю цифру числа).
3. $a = b$.
4. 166 см^2, 140 см^3.
5. 9 ч, 540 км.
6. $1\frac{11}{13}$ ч.

VI. Подведение итогов учебного года

1. Сообщение годовых оценок (личные успехи и недочеты каждого учащегося, рекомендации по улучшению успеваемости).

2. Анализ изучения материала (темы, которые усвоены хорошо, и темы, которые усвоены недостаточно хорошо, указание причин: невнимательность, незнание основных формул, арифметические ошибки).

3. Поздравление с окончанием учебного года и с наступающими каникулами.

Литература

1. *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика.* Районные олимпиады. М.: Просвещение, 2010.

2. *Балаян Э.Н.* 555 олимпиадных и занимательных задач по математике. 5–11 классы. Р. н/Д.: Феникс, 2009.

3. *Безрукова О.Л.* Олимпиадные задания по математике. 5–11 классы. Волгоград: Учитель, 2010.

4. *Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Рослова Л.О. и др.* Математика. Рабочая тетрадь. 5 класс. М.: Просвещение, 2016.

5. *Глейзер Г.И.* История математики в школе. М.: Просвещение, 1982.

6. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика. Справочные материалы. М.: Просвещение, 1998.

7. *Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.Б. и др.* Математика. Учебник. 5 класс. М.: Просвещение, 2016.

8. *Клименченко Д.В.* Задачи по математике для любознательных. М.: Просвещение, 1992.

9. *Кузнецова Л.В., Минаева С.С., Рослова Л.О. и др.* Математика. Тематические тесты. 5 класс. М.: Просвещение, 2016.

10. *Кузнецова Л.В., Минаева С.С., Рослова Л.О. и др.* Математика. Контрольные работы. 5 класс. М.: Просвещение, 2016.

11. *Минаева С.С.* Математика. Устные упражнения. 5 класс. М.: Просвещение, 2016.

12. *Рурукин А.Н., Чайковский К.Г.* Математика 5–6 классы. М.: МИФИ, 2014.

13. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984.

14. *Фарков А.В.* Математические олимпиады. 5–8 классы. М.: ВАКО, 2012.

15. *Фарков А.В.* Математические олимпиады в школе. 5–11 классы. М.: Айрис-пресс, 2009.

16. *Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В.* Математика. Задачи на смекалку. 5–6 классы. М.: Просвещение, 2000.

Содержание

Учебно-методическое издание

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич
Гусева Наталья Николаевна
Шуваева Елена Акимовна

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО МАТЕМАТИКЕ

К УМК Г.В. Дорофеева и др. (*М.: Просвещение*)

5 класс

Выпускающий редактор *Юлия Антонова*
Дизайн обложки *Юлии Морозовой*
Верстка *Дмитрия Сахарова*

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано в печать 29.10.2016.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Newton.
Усл. печ. листов 12,6. Тираж 5000 экз. Заказ №1093.

ООО «ВАКО». 129085, Москва, пр-т Мира, д. 101.

Отпечатано в полном соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «Чеховский печатник».
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Тел.: +7-915-222-15-42, +7-926-063-81-80.